電気回路I及び演習

2. 基本素子の回路

学習目標

- 関数電卓の使い方を思い出す
- 基本素子(抵抗、静電容量、自己インダクタンス)の交流回路での電圧、電流、電力の瞬時値及び実効値の関係を理解する
- 基本素子における電圧と電流との位相の関係を理解する
- リアクタンスの概念を理解する

関数電卓とは

- 高機能な電卓
- 四則演算
- 三角関数, log, 指数関数等
- 連立方程式(3次まで)
- 行列計算
- 複素数演算
- 科学記号の利用
- その他色々

学習目標

- 関数電卓の使い方を思い出す
- 基本素子(抵抗、静電容量、自己インダクタンス)の交流回路での電圧、電流、電力の瞬時値及び実効値の関係を理解する
- 基本素子における電圧と電流との位相の関係を理解する
- リアクタンスの概念を理解する

前提

- 話を簡単にするために初期位相は0とする
    - 実際には初期位相+素子の影響による位相
- R, C, Lは時間に対して変化しない

3.3.1 抵抗Rのみの回路(p51)

- 正弦波交流電圧vを式(3.7)とすると、**オームの法則は交流でも成立する**ので電流は式(3.8)となる。(図3.2)

- I_mとV_mの関係に注意

$$
\begin{aligned}
v &= V_m \sin\omega t \ldots (3.7) \\
i &= \frac{v}{R} = \frac{V_m}{R}\sin\omega t = I_m \sin\omega t \ldots (3.8)
\end{aligned}
$$

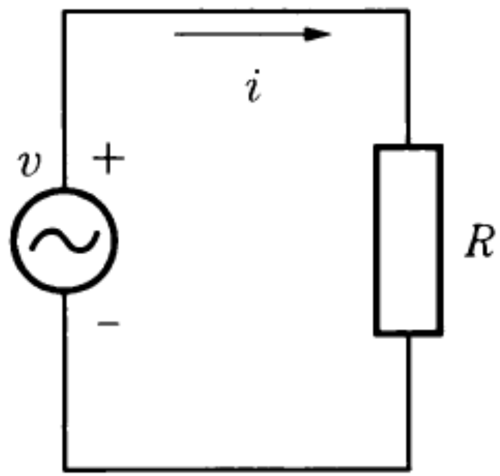


図 3.2

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著, 三浦光著

最大値の関係 $V_m = I_m R$ より $\frac{V_m}{\sqrt{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}R$ とすると、$V = IR$ が得られ実効値でもオームの法則が成り立つことがわかる。

抵抗のみの回路での電力

cosの範囲は-1~1

$$
\begin{aligned}
\text{瞬時電力}:p &= vi = V_m I_m \sin^2 \omega t \\
&= \frac{1}{2} V_m I_m (1-\cos 2\omega t) \ldots (3.10) \\
p\,\text{の最大値}:P_m &= V_m I_m = \frac{V_m^2}{R} = R I_m^2 \ldots (3.11) \\
p\,\text{の平均値}:P &= \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_0^{\frac{T}{2}} p\,dt = \frac{V_m I_m}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} (1-\cos 2\omega t)\,dt \\
&= \frac{V_m I_m}{2} = \frac{P_m}{2} \ldots (3.12) \\
P &= \frac{V_m I_m}{2} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_m}{\sqrt{2}} = V \cdot I = \frac{V^2}{R} = R I^2 \ldots (3.13)
\end{aligned}
$$

抵抗のみの瞬時電力

- オームの法則は交流でも成立する
- 同相の正弦波を乗算するので値は全て正
  - 熱エネルギーとして消費されることを表わしている
- 電圧や電流の2倍の周波数

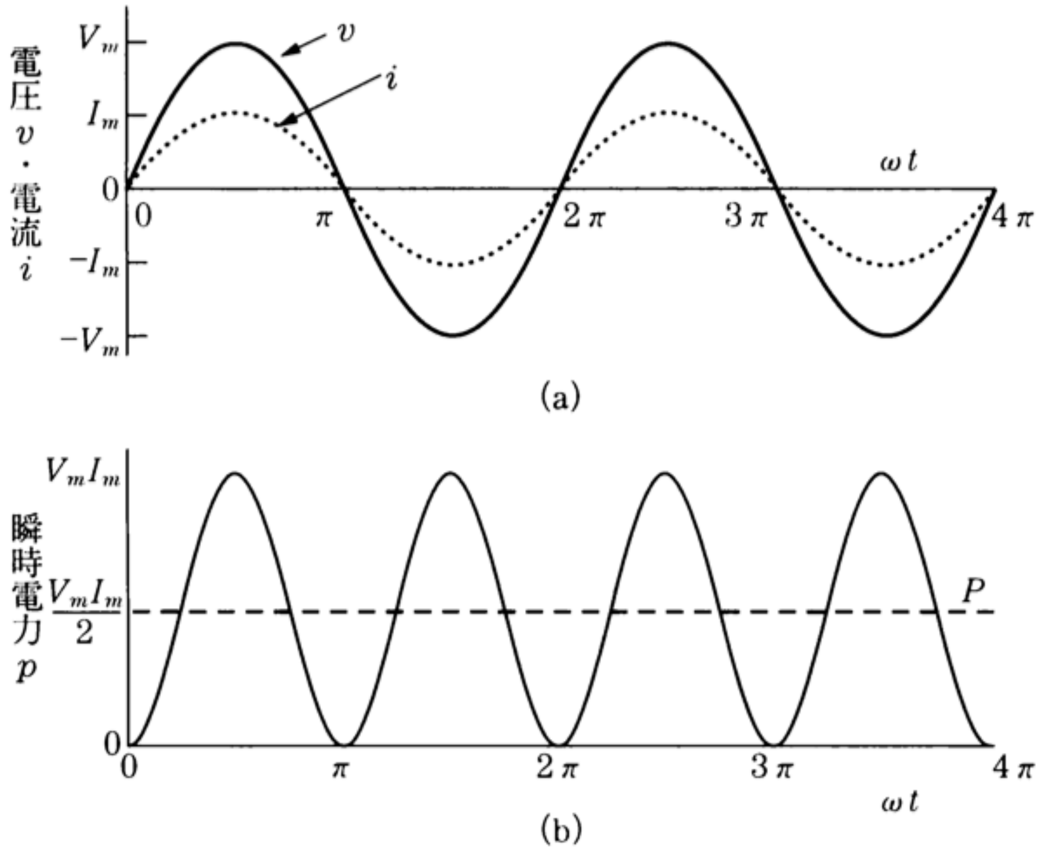


図 3.3

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著

実効値での表現:式(3.13)

$$P = \frac{V_m I_m}{2} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_m}{\sqrt{2}} = V \cdot I = \frac{V^2}{R} = RI^2 \ldots (3.13)$$

- V, Iは電圧、電流の実効値
- 直流の計算と同じ値になる(ように定義した)
- 実効値を使えば直流と同様に電力が計算できる。

例題3.4(p.53)

正弦波交流電圧 $v = 100\sqrt{2}\sin(\omega t)[V]$ が抵抗 $R = 25[\Omega]$

に加えられたとき、R を流れる電流 i を表わす式とその

実効値 I を求めよ。また、この時の電力 P も求めよ

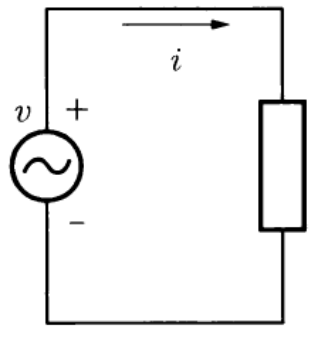


図 3.2

ce: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著

例題3.4(p.53)の出題意図

電圧と抵抗が既知→電流 $I = V/R$

正弦波交流電圧 $v = 100\sqrt{2}\sin(\omega t)[V]$ が抵抗 $R = 25[\Omega]$

実効値V=100[V], 初期位相=0

に加えられたとき、R を流れる電流 i を表わす式とその

実効値Iが求まれば iは電圧と同相の式

実効値 I を求めよ。また、この時の電力 P も求めよ

実効値で計算すれば良い

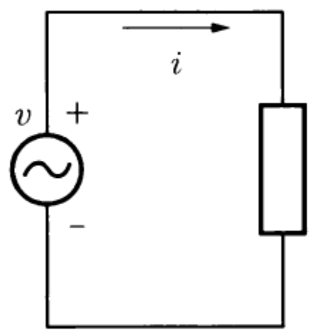


図 3.2

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著

例題3.4 の解答例

$V = 100[V]$ とオームの法則より電流の実効値 I は

$$I = \frac{V}{R} = \frac{100}{25} = 4[A]$$

よって i の最大値 I_m は $I_m = \sqrt{2}I = 4\sqrt{2}$ となり瞬時値 i の式は

$$i = 4\sqrt{2}\sin\omega t$$

電力 P は

$$P = V \cdot I = 100 \times 4 = 400[W]$$

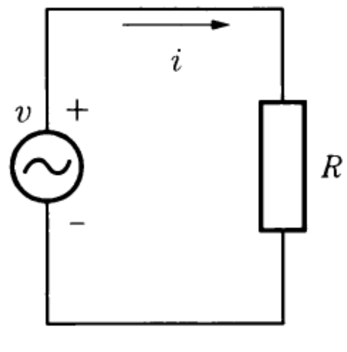
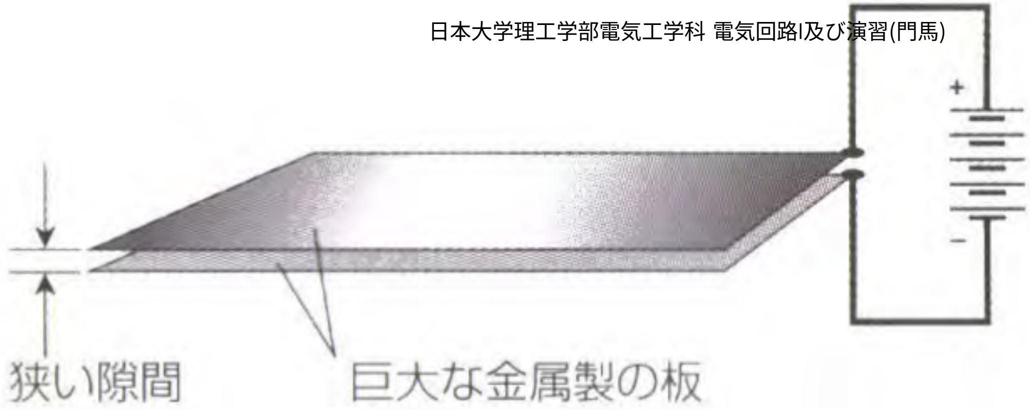


図 3.2

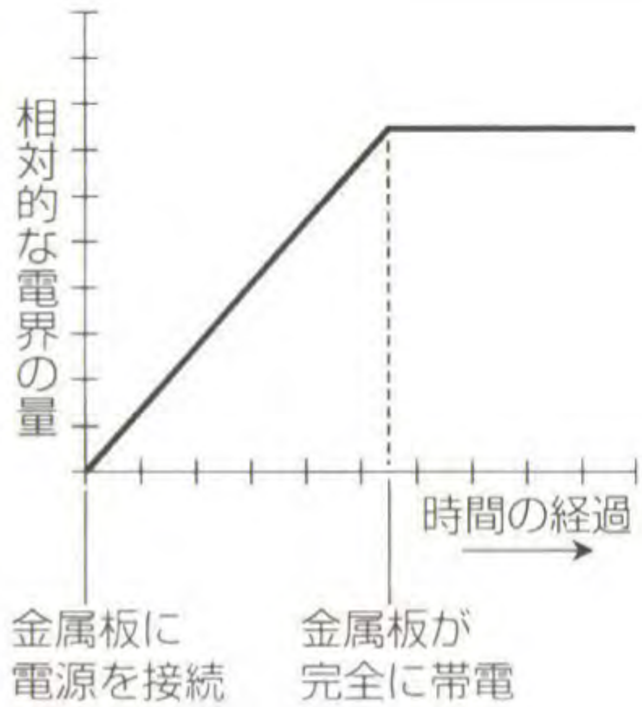
ce: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著

3.3.2 静電容量Cのみの回路 (p54)

巨大なコンデンサから考える静電容量Cのイメージ



- 直流の場合、コンデンサの端子電圧が加えた電圧と同じになるまで電荷が蓄えられ(帯電)、その後は電流が流れなくなる
- 完全に帯電する前に電池の正負を逆にすると、帯電しただけ放電し、その後逆向きに帯電が始まる(電流の向きの反転より帯電の向きの反転が遅い)
- 完全に帯電する前に電池の正負を逆にする作業を繰返すと、正負を繰返す電流が流れ続けているように見える



Source: 独習 電気/電子工学, S. Gibilisco

3.3.2 静電容量Cのみの回路 (p.54)

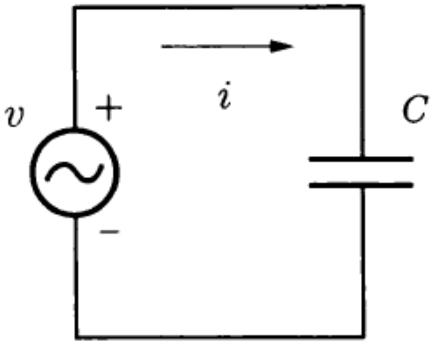


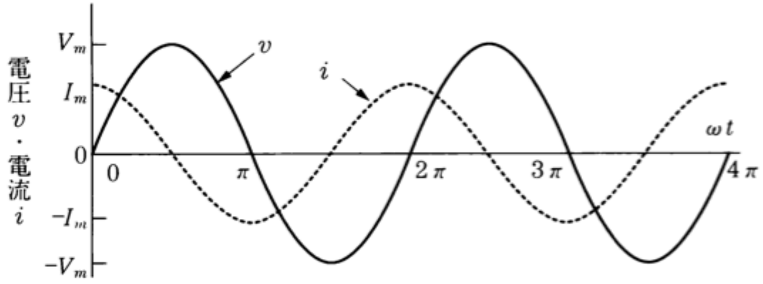
図 3.4

- コンデンサの電荷q

$$q = Cv = CV_m \sin \omega t \ldots (3.14)$$

  - vが正負反転し電荷qも正負反転している

- 電流iは電荷の時間微分(単位時間あたりの移動量)なので



(a)

$$\begin{aligned} i &= \frac{dq}{dt} = C\frac{dv}{dt} \ldots (3.15) \\ &= C\frac{d}{dt}(V_m \sin \omega t) = \omega C V_m \cos \omega t \ldots (3.16) \\ &= \underbrace{\omega C V_m}_{=I_m} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

電流は電圧より位相が π/2 進む

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著

Cについて実効値で考えると容量性リアクタンスが求まる(p56)

$I_m = \omega C V_m$ より

$$V_m = \frac{1}{\omega C} I_m \ldots (3.17)$$

$V_m = \sqrt{2}V, I_m = \sqrt{2}I$ より

$$\begin{aligned} \sqrt{2}V &= \frac{1}{\omega C}\sqrt{2}I \\ V &= \frac{1}{\omega C} I \ldots (3.18) \\ &= X_C I \end{aligned}$$

$X_C = \frac{1}{\omega C}$ を容量性リアクタンスと呼ぶ $[\Omega]$

※式には出てこないが位相差の発生を忘れないこと

- リアクタンス: 抵抗のような量だが電圧と電流に位相差を発生させる
- 大きさについて抵抗のような働きをする量([Ω])
- 電圧と電流に位相差が発生する (電圧が90°遅れる=電流が90°進む)
- 周波数で値が変わる

周波数で変わるX_c

- 周波数が極めて低い(ω<<1) 殆ど変化しない=直流
  - 1/ωCは無限大に近づく=絶縁
- 周波数が低い=変化が時間的に緩やか
  - 1/ωCは大きい
- 周波数が高い=変化が時間的にやや激しい
  - 1/ωCは小さい
- 周波数が極めて高い=変化が時間的に激しい
  - 1/ωCはほぼ0
  - 周波数の高い信号からはX_cは導線と同じに見える
- 電子回路で必要になる知識(例: カップリング コンデンサ)

Cのみの回路での瞬時電力(p56)

- 電流は電圧よりπ/2位相が進む
- 瞬時電力は周波数が2倍の正弦波
- 全体では電力を消費していない(P=0)
  - 蓄えたり放出する

$$
\begin{aligned}
p &= vi = \omega C V_m^2 \sin\omega t \cdot \cos\omega t \\
&= \frac{1}{2}\omega C V_m^2 \sin 2\omega t \\
&= \omega C V^2 \sin 2\omega t \ldots (3.20)
\end{aligned}
$$

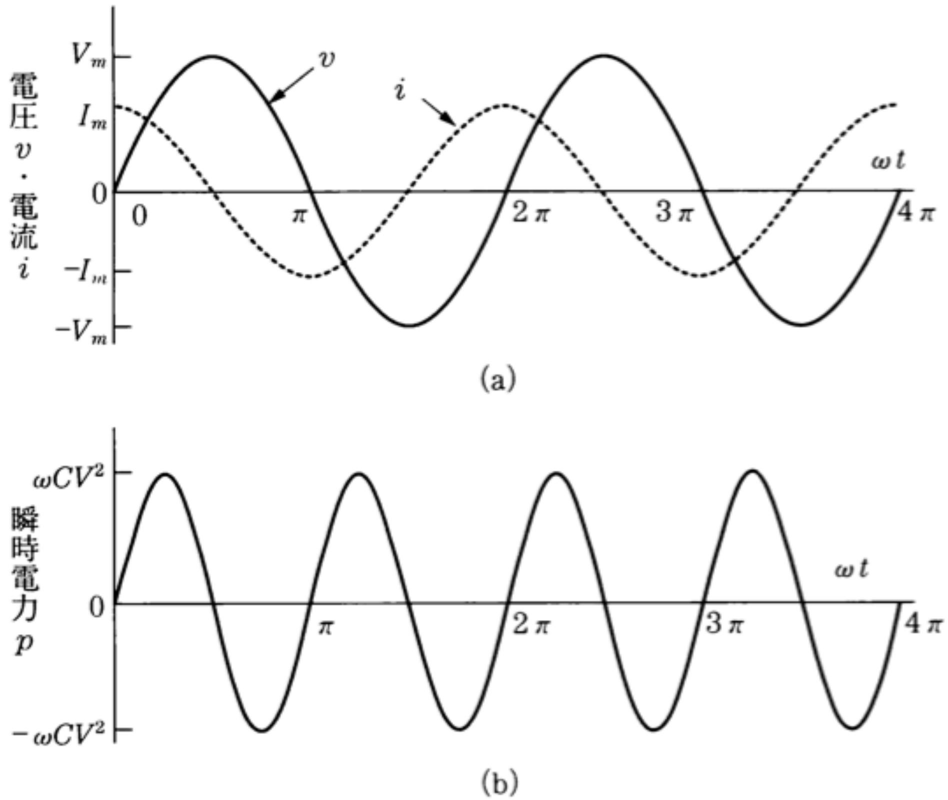


図 3.5

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著

コンデンサの蓄積エネルギー(3.22)とその平均(3.33)

$$
\begin{aligned}
W_c &= \int pdt = \int vidt = \int v\frac{dq}{dt}dt \\
&= \int vdq = C\int vdv(\because q = Cv) \\
&= \frac{Cv^2}{2} = \frac{C}{2}V_m^2 \sin^2 \omega t \\
&= C\left(\frac{V_m}{2}\right)^2 \sin^2 \omega t \\
&= CV^2 \frac{1-\cos 2\omega t}{2} \ldots (3.22)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W_{Cave} &= \frac{1}{T}\int_0^T W_c dt \\
&= \frac{CV^2}{2T}\int_0^T (1-\cos 2\omega t)dt \\
&= \frac{CV^2}{2} \ldots (3.23)
\end{aligned}
$$

今は(3.23)を覚えておく程度で良い

例題3.5 (p.57)

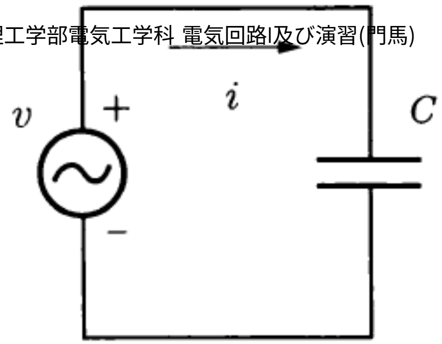


図 3.4

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著

周波数 $f = 100[kHz]$ で最大値 $I_m = 5\sqrt{2}[A]$ の正弦波電流 i が流れたとき、$0.2[\mu F]$ の静電容量 C に加えられた正弦波電圧 v を表わす式を求めよ

例題3.5 (p.57)の出題意図

周波数 $f = 100[kHz]$ で最大値 $I_m = 5\sqrt{2}[A]$ の正弦波電

ω=2πfの関係を使う　　　　実効値を使う

流 i が流れたとき、$0.2[\mu F]$ の静電容量 C に加えられた

容量性リアクタンスX_c=1/ωCを使ってV=X_c I

正弦波電圧 v を表わす式を求めよ

実効値V→瞬時値vを表わす式

リアクタンスが存在する回路は、表記されないが位相差が必ず発生することに注意

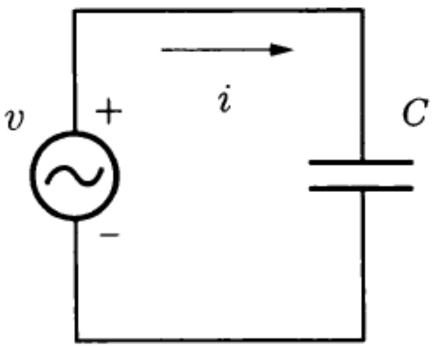


図 3.4

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著

例題3.5の解答例

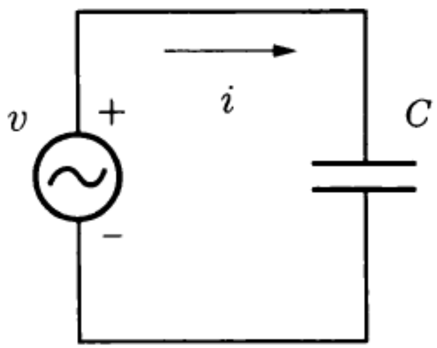


図 3.4

$f = 100[kHz]$ と $\omega = 2\pi f$ より角周波数 ω は

$$\omega = 2\pi f = 200 \times 10^3 \pi$$

容量性リアクタンス X_C は

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{200 \times 10^3 \pi \times 0.2 \times 10^{-6}} = \frac{1}{40 \times 10^{-3} \pi} [\Omega]$$

よって $I_m = 5\sqrt{2}[A]$ より $I = 5[A]$ より実効値 V は

$$V = X_C I = \frac{5}{40 \times 10^{-3} \pi} = \frac{1}{8 \times 10^{-3} \pi} \simeq 39.8[V]$$

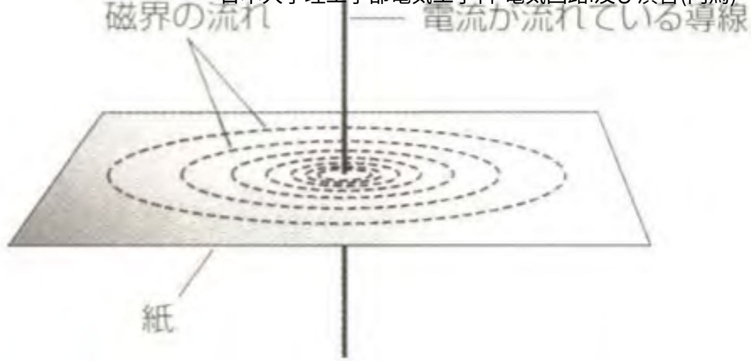
電圧 v の式は、容量性リアクタンスの場合、電圧の位相が電流より $\frac{\pi}{2}$ だけ遅れるので

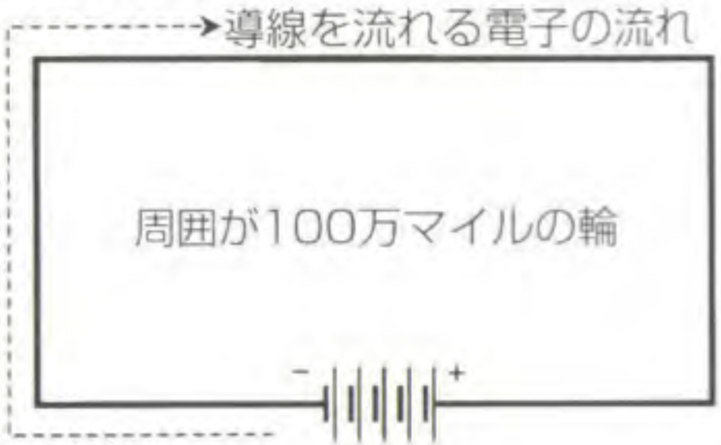
$$v = V\sqrt{2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = 39.8\sqrt{2} \sin\left(200 \times 10^3 \pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

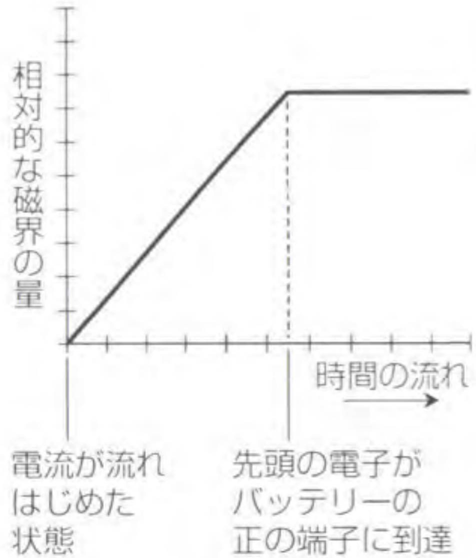
自己インダクタンス(p57)

電流と磁界の関係から見る自己インダクタンスのイメージ

- 導線に直流電流を流すと周辺に磁界が発生する
- 導線で巨大な輪(コイル)を作った場合、直流の電流を流すと電子が回路を1周するまで磁界の強さは増え続け、あとは一定になる
- コイルは磁界を作りながら電流が流れるので、少し時間が掛かる
  - 電流が流れ切る前に電源電圧の正負を反転させると電流の変化は少し遅れる
  - 変化が激しい程電流が流れにくい



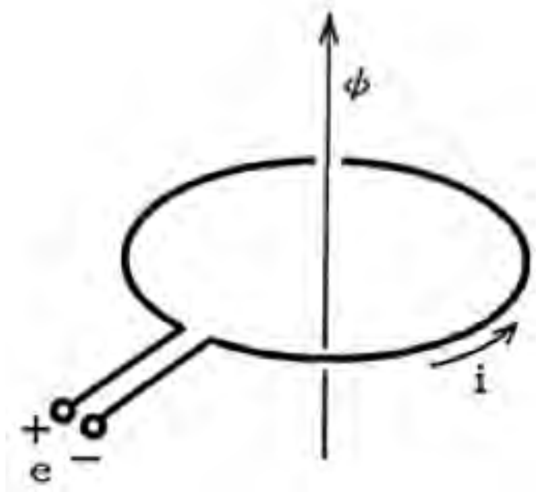




Source: 独習 電気/電子工学, S. Gibilisco

3.3.3 自己インダクタンスLのみの回路(p.57)

- コイルの前に導線を円状に1巻きしたものを考える
- 電流iを流すと磁束ϕが生じる $\phi = ki$
- n巻きでは $\phi = nki$
- ファラデーの電磁誘導
  - コイルを貫く磁束を変化させると、その変化を妨げる向きの磁束を生じるようにコイルに電圧eが生じる
- kn^2=Lとおく(L: 自己インダクタンス[H])



電流iで発生した磁束はコイル自身を貫くので電圧eを発生させる原因になる(“自己”の理由)

$$e = -n\frac{d\phi}{dt} = -kn^2\frac{di}{dt} = -L\frac{di}{dt} \ldots (3.24, 25)$$

コイルと交流電圧源との関係(p. 58)

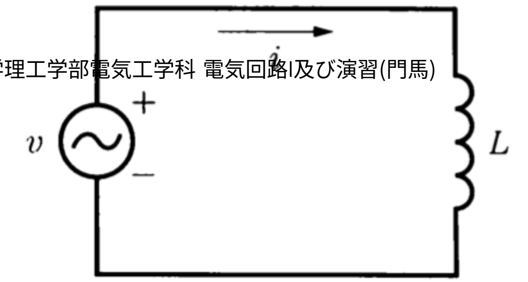
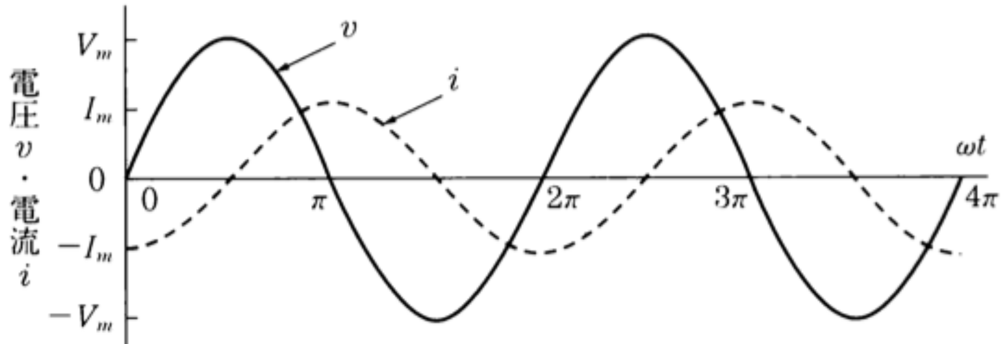


図 3.6

$$e = -n\frac{d\phi}{dt} = -kn^2\frac{di}{dt} = -L\frac{di}{dt} \ldots (3.24, 25)$$

自己インダクタンス L のコイルに交流電圧 v が加えられ、交流電流 i が流れている時、L に電磁誘導で誘起される電圧 e は v と平衡しているので $v + e = 0$。よって

$$v = -e = L\frac{di}{dt} \ldots (3.26)$$



(a)

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著

(以降 e は忘れて良い)

i を求めるため両辺を時間 t で積分すると $\int v dt = Li$ より $i = \frac{1}{L}\int v dt$。ここで $v = V_m \sin\omega t$ とすると

$$i = \frac{V_m}{L}\int \sin\omega t dt = \frac{V_m}{\omega L}(-\cos\omega t) = \overbrace{\frac{V_m}{\omega L}}^{=I_m}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \ldots (3.27)$$

電流は電圧より位相が π/2 遅れる

Lについて実効値で考えると誘導性リアクタンスが求まる(p56)

$I_m = \frac{V_m}{\omega L}$ より

$$V_m = \omega L I_m \ldots (3.28)$$

$V_m = \sqrt{2}V, I_m = \sqrt{2}I$ より

$$\begin{aligned} \sqrt{2}V &= \omega L \sqrt{2} I \\ V &= \omega L I = X_L I \ldots (3.29) \end{aligned}$$

$X_L = \omega L$ を誘導性リアクタンスと呼ぶ $[\Omega]$

※式には出てこないが位相差の発生を忘れないこと

- リアクタンス: 抵抗のような量だが電圧と電流に位相差を発生させる
- 大きさについて抵抗のような働きをする量([Ω])
- 電圧と電流に位相差が発生する (電流が90°遅れる=電圧が90°進む)
- 周波数で値が変わる

周波数で変わるX_L

- 周波数が極めて低い(ω<<1) 殆ど変化しない=直流
    - ωLは0に近づく=ただの導線
- 周波数が低い=変化が時間的に緩やか
    - ωLは小さい
- 周波数が高い=変化が時間的にやや激しい
    - ωLは大きい
- 周波数が極めて高い=変化が時間的に激しい
    - ωLは非常に大きくなる
    - 周波数の高い信号からはX_Lは絶縁体と同じに見える
- 電子回路で必要になる知識(例: チョークコイル)

Lのみの回路での瞬時電力

- 電流は電圧よりπ/2位相が遅れる
- 瞬時電力は周波数が2倍の正弦波
- 全体では電力を消費していない(P=0)

式 (3.27) より $i = -\frac{V_m}{\omega L}\cos\omega t$

$$
\begin{aligned}
p &= vi = V_m \sin\omega t\left(-\frac{V_m}{\omega L}\cos\omega t\right) \\
&= -\frac{V_m^2}{\omega L}\cdot\frac{\sin 2\omega t}{2}(p.177\ 参照) \\
&= -\frac{1}{\omega L}\cdot\left(\frac{V_m}{\sqrt{2}}\right)^2 \sin 2\omega t \\
&= -\frac{V^2}{\omega L}\sin 2\omega t = -\omega L I^2 \sin 2\omega t \ldots (3.30)
\end{aligned}
$$

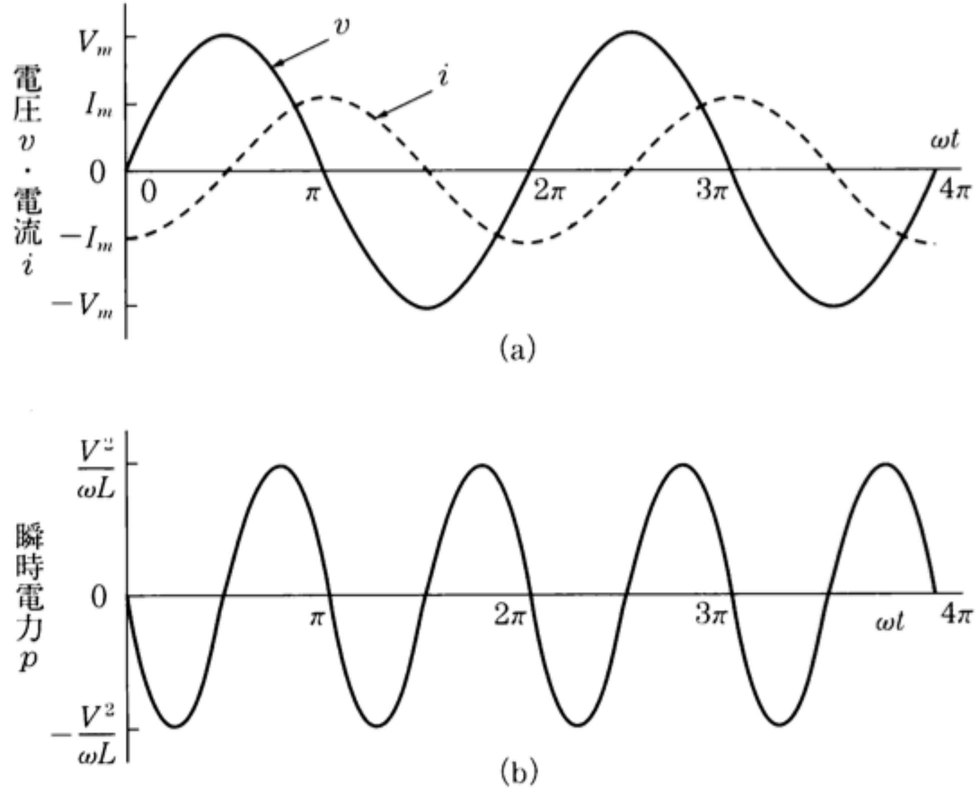


図 3.7

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著

式(3.32)(3.33)は省略

電磁気IIで習う高度な話

例題3.6(p61)

自己インダクタンス $L = 20[mH]$ のコイルに、正弦波交流電圧 $v = 100\sqrt{2}\sin(100\pi t)[V]$ が加わった。コイルを流れる電流 i を表す式、およびその実効値 I を求めよ。

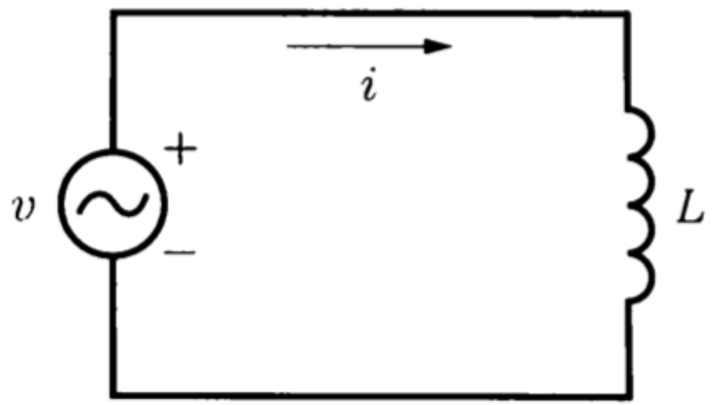


図 3.6

例題3.6(p61)

m→10^-3に注意

自己インダクタンス$L = 20[mH]$のコイルに、正弦波交流電圧$v = 100\sqrt{2}\sin(100\pi t)[V]$が加わった。コイルを流れる電流$i$を表す式、およびその実効値$I$を求めよ。

V=100　　ω=100π

実効値I →瞬時値i の式

リアクタンスが存在する回路は、表記されないが位相差が必ず発生することに注意

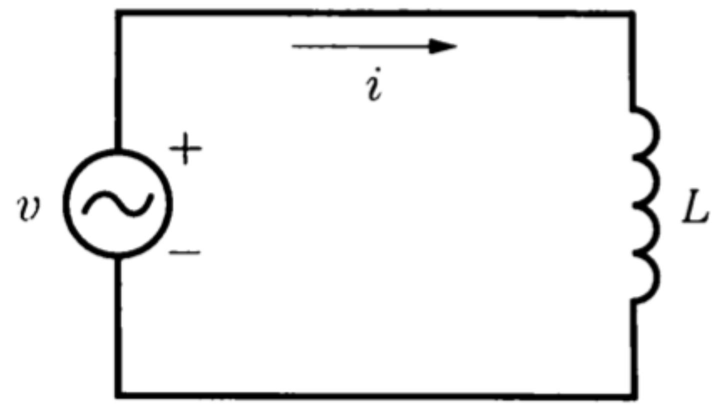


図 3.6

Source:ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著

例題3.6の解答例

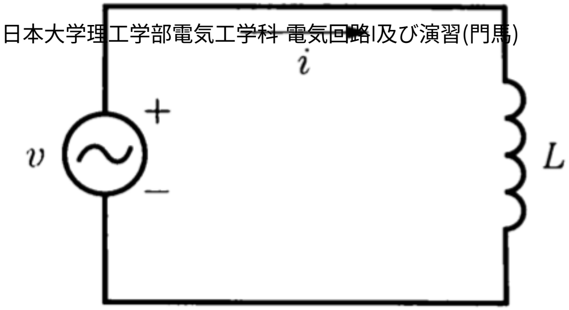


図 3.6

誘導性リアクタンス X_L は

$$X_L = \omega L = 100\pi \times 20 \times 10^{-3} = 2\pi[\Omega]$$

$V_m = 100\sqrt{2}[V]$ より $V = 100[V]$ となり実効値 I は

$$I = \frac{V}{X_L} = \frac{100}{2\pi} = \frac{50}{\pi} \simeq 15.9$$

電流 i の式は位相が電圧より $\frac{\pi}{2}$ だけ遅れるので $I_m = \sqrt{2}I = 15.9\sqrt{2} \simeq 22.5$ より

$$i = 22.5\sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$