電気回路I及び演習

3. 基本回路の計算: RL, RC, RLC直列回路、リアクタンス、インピーダンス

学習目標

- 基本素子(R, L, C)のみの回路と、これらが直列に接続されたRC, RL, RLC直列回路との違いを、電圧と電流の位相の関係や、抵抗とリアクタンスの関係から理解する
- 抵抗およびリアクタンスとインピーダンスとの関係を理解する

前回の復習とクイズ

Q. C又はLだけの回路にRを繋いだら電圧に対する電流の位相は？

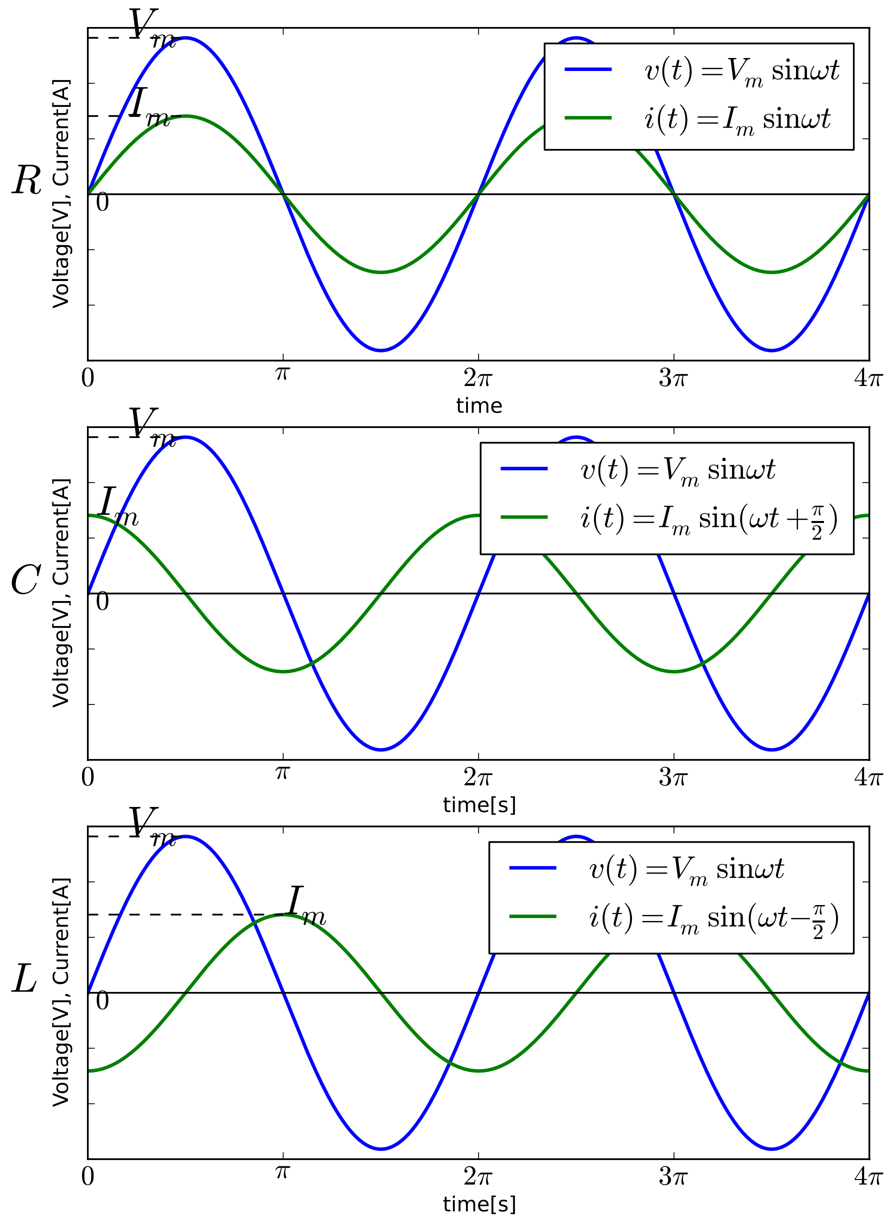
1. そのまま
2. 進みと遅れが反転する
3. その他

Q. C又はLだけの回路にRを繋いだら抵抗のような働きをするリアクタンスと抵抗の関係は？

1. 加算・減算
2. 乗算・除算
3. その他

Q. Cだけの回路にLを繋いだときのリアクタンスは？

1. 加算・減算
2. 乗算・除算
3. その他



前回の復習とクイズ

Q. C又はLだけの回路にRを繋いだら電圧に対する電流の位相は？

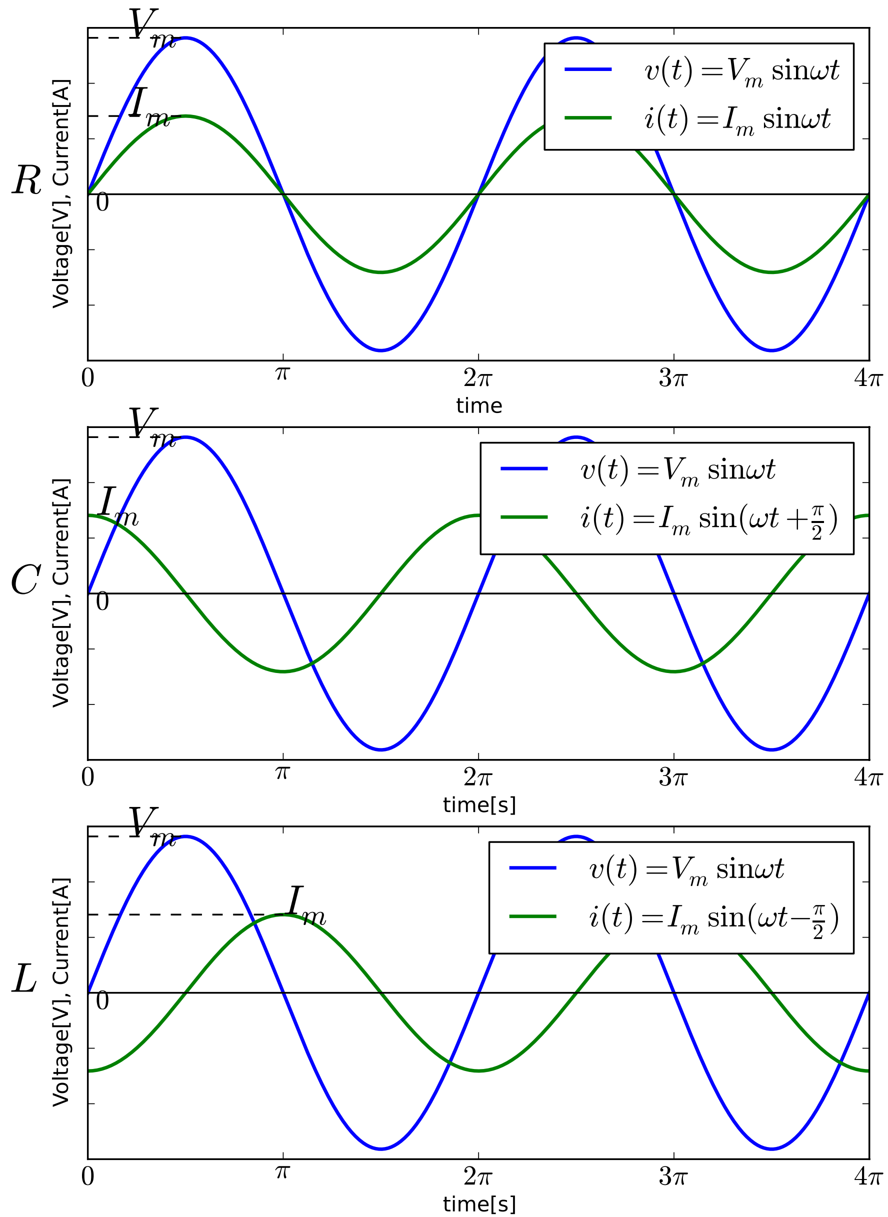
1. そのまま
2. 進みと遅れが反転する
3. 抵抗とリアクタンスの比率で決まる

Q. C又はLだけの回路にRを繋いだら抵抗のような働きをするリアクタンスと抵抗の関係は？

1. 加算・減算
2. 乗算・除算
3. ベクトルの関係

Q. Cだけの回路にLを繋いだときのリアクタンスは？

1. 加算・減算
2. 乗算・除算
3. その他



RLC直列回路(p73)

※教科書とは説明の順番が異なるので注意

なぜRLC直列回路が先なのか

- RC直列回路、RL直列回路、LC直列回路(後日)は特殊な例
    - RLC直列回路のいずれかの素子の抵抗またはリアクタンスが0になった場合
- RLC直列回路が理解できれば後は同じ話

LとCが直列の場合のリアクタンス

$$\text{リアクタンス}\ X[\Omega] = \omega L - \frac{1}{\omega C} = X_L - X_C$$

$$\omega L > \frac{1}{\omega C} \quad : \quad \text{誘導性}$$

$$\omega L < \frac{1}{\omega C} \quad : \quad \text{容量性}$$

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad : \quad \text{共振 (今日はやらない)}$$

電圧と電流の位相の関係はリアクタンスが誘導性か容量性かで決まる。X_LとX_Cは打消し合う関係と言える

リアクタンスと抵抗が直列の場合

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著

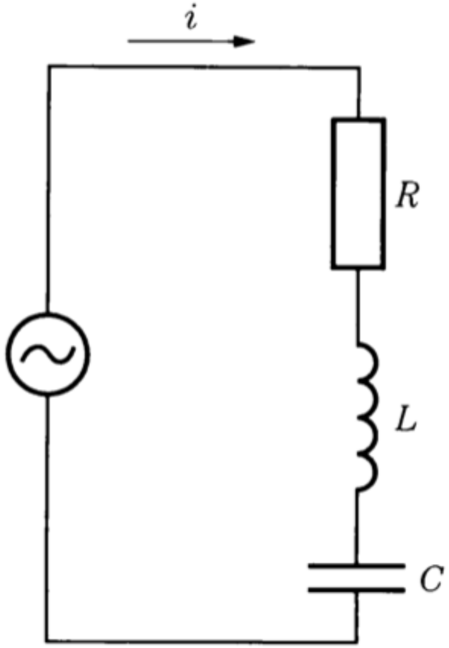
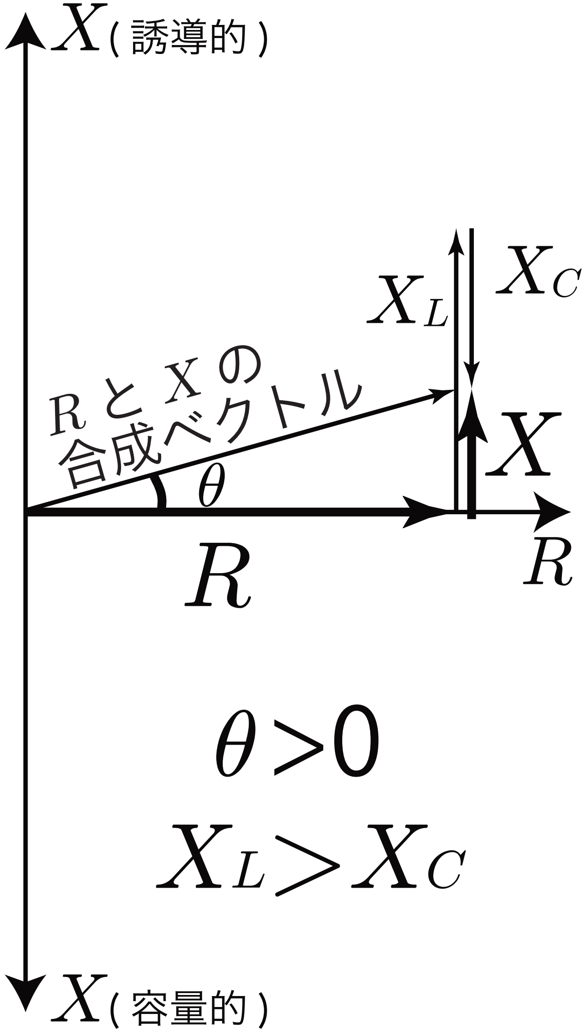
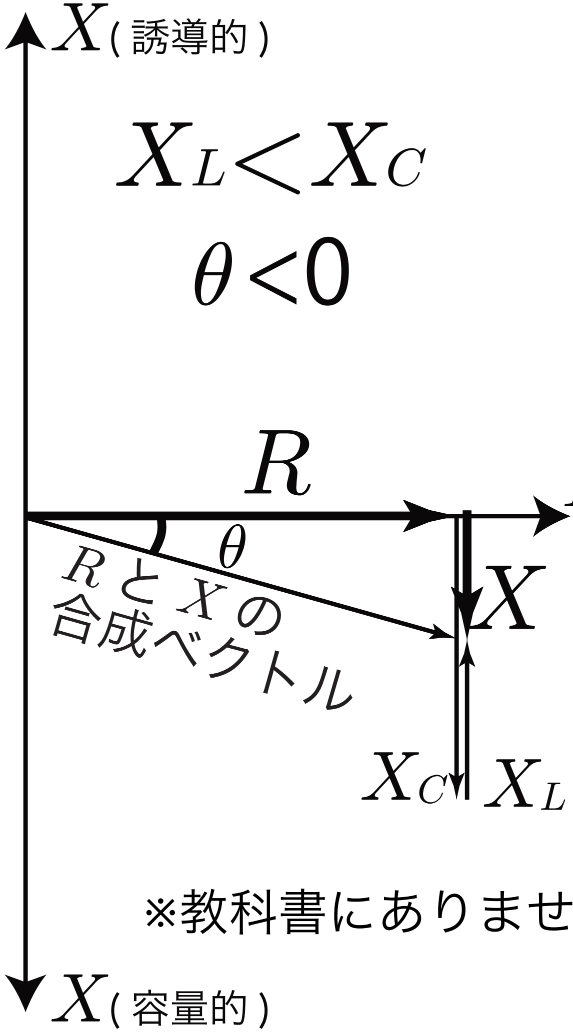


図 3.16





※教科書にありません

- **抵抗を水平方向、リアクタンスを垂直方向のベクトルとして扱う**
- リアクタンスX=X_L-X_C
- **RとXの合成ベクトルの成す角が電圧の電流に対する位相を表す**

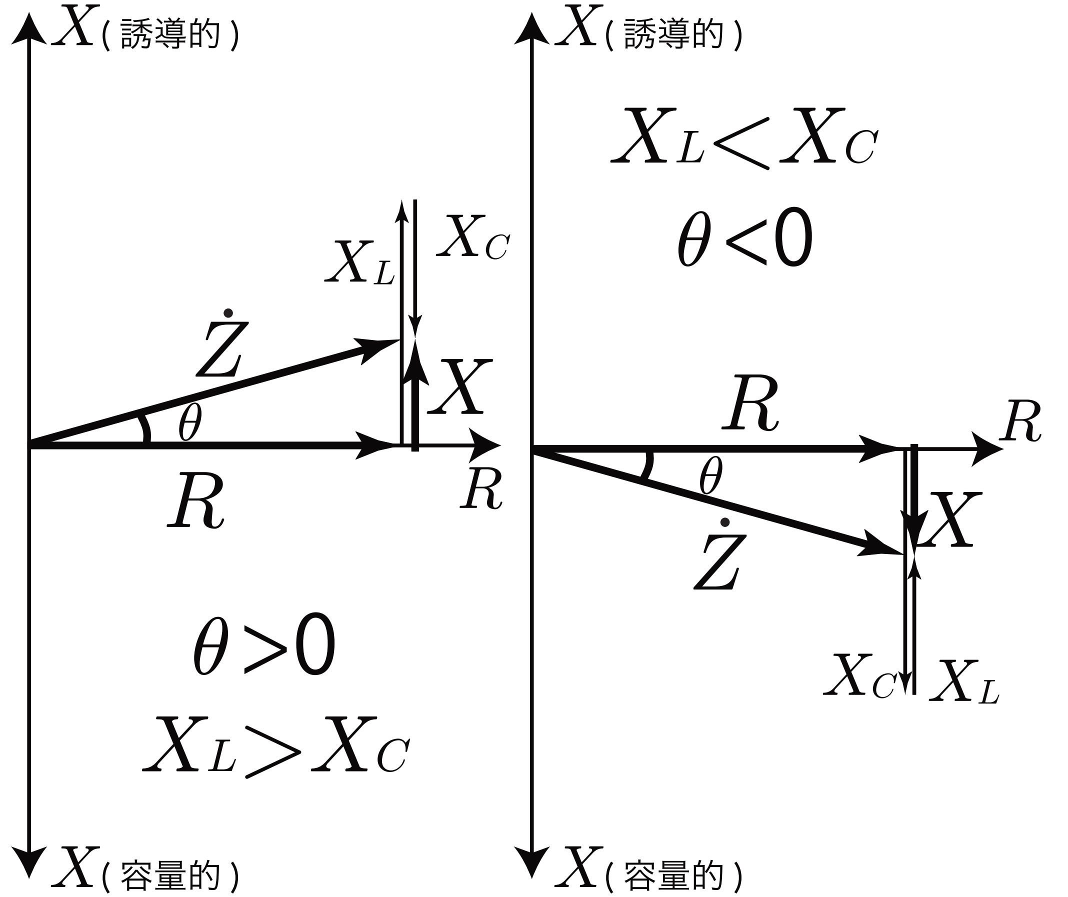
R と X の合成ベクトルを

インピーダンス $\dot{Z}$ と呼ぶ

インピーダンスの大きさ $|\dot{Z}|$ は実効値のオームの法則に使え、リアクタンスでは誘導性・容量性で暗記する必要があった位相 θ の関係も、オームの法則に従って「電流に位相 θ の影響を与えたのが電圧の位相」と考えれば良い。(初期位相が 0 の場合)

$$V = I|\dot{Z}| \ldots (3.75)'$$

$$\begin{aligned}
|\dot{Z}| &= \sqrt{R^2 + X^2} \ldots (3.76) \\
&= \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \\
&= \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \\
\theta &= \tan^{-1}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) \\
&= \tan^{-1}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) \ldots (3.73)
\end{aligned}$$



※教科書でも最終的にはインピーダンスをベクトルで扱う

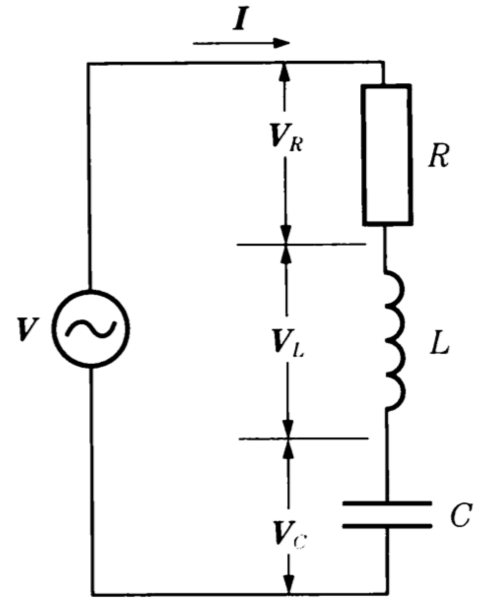
例題 3.11 (p.74)

$R = 4[\Omega], L = 4[mH], C = 125[\mu F]$ である。交流電流

$i = 5\sin 2000t[A]$ が流れたとき、加えられた電圧の瞬時

値 v を求めよ。また、各素子における電圧降下の実効値

V_R, V_L, V_C を求めよ。



Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著

例題 3.11 (p.74)の出題意図

$|Z|$とθを求める

$\underline{R = 4[\Omega], L = 4[mH], C = 125[\mu F]}$ である。交流電流

ω=2000

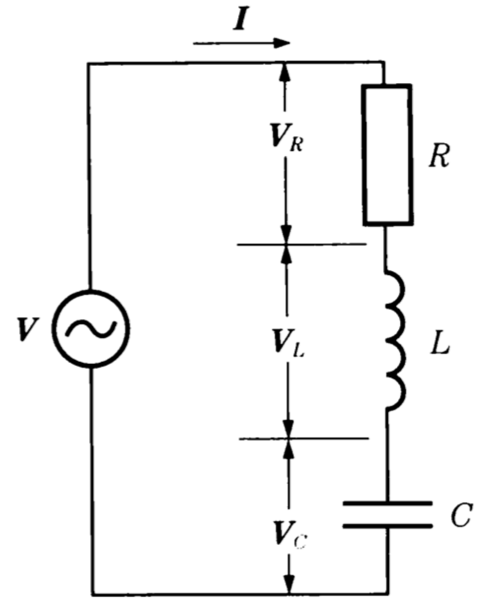
$i = \underline{5}\sin \underline{2000}t[A]$ が流れたとき、加えられた電圧の瞬時

I_m=5, I=5/$\sqrt{2}$, V=$|Z|I$　　　　θとVを基にする

値 v を求めよ。また、各素子における電圧降下の実効値

$\underline{V_R, V_L, V_C}$ を求めよ。

V_R=IR, V_L=IX_L, V_C=IX_C



Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光雄著

例題3.11解答例(1)

$$
\begin{aligned}
X_L &= 2000 \times 4 \times 10^{-3} = 8[\Omega], \\
X_C &= \frac{1}{2000 \times 125 \times 10^{-6}} = 4[\Omega] \\
|\dot{Z}| &= \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \\
&= \sqrt{4^2 + (8-4)^2} = 4\sqrt{2} \simeq 5.66[\Omega] \\
\theta &= \tan^{-1}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) \\
&= \tan^{-1}(1) = 45^\circ = \frac{\pi}{4}(\theta \text{が正なので } \dot{Z} \text{ は誘導的})
\end{aligned}
$$

$I_m = 5[A], I = \frac{5}{\sqrt{2}}, |\dot{Z}| = 4\sqrt{2}$ より $V = |\dot{Z}|I = 20[V]$

例題3.11解答例(2)

$V = 20[V], \theta = \frac{\pi}{4}, \omega = 2000$ より

$$v = 20\sqrt{2}\sin\left(2000t + \frac{\pi}{4}\right)[V]$$

$I = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}[A]$ より

$$\begin{aligned} V_R &= IR = \frac{5\sqrt{2}}{2} \times 4 = 10\sqrt{2} \simeq 14.1[V] \\ V_L &= IX_L = \frac{5\sqrt{2}}{2} \times 8 = 20\sqrt{2} \simeq 28.3[V] \\ V_C &= IX_C = \frac{5\sqrt{2}}{2} \times 4 = 10\sqrt{2} \simeq 14.1[V] \end{aligned}$$

RLC直列回路の回路方程式を使った確認 (p73)

3.4.5RLC直列回路(p.73)式(3.72)の導出

R, L, C における電圧効果の瞬時値を v_R, v_L, v_C とすると式 (3.8), (3.26), (3.15) より $v = v_R + v_L + v_C \dots (3.70)$ より $v = iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt \dots (3.71)$ となる。交流においても直列の場合は同一電流が流れるので、電流を基準に考えると $i = I_m \sin \omega t$ より

$$
\begin{aligned}
v &= RI_m \sin \omega t + LI_m \frac{d}{dt}(\sin \omega t) + \frac{I_m}{C}\int \sin \omega t dt \\
& RI_m \sin \omega t + LI_m \cos \omega t - \frac{I_m}{C}\cos \omega t \\
& RI_m \sin \omega t + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I_m \cos \omega t
\end{aligned}
$$

$|\dot{Z}|$ でまとめると

$$
v = |\dot{Z}| I_m \left(\sin \omega t \cdot \frac{R}{|\dot{Z}|} + \cos \omega t \cdot \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{|\dot{Z}|}\right)
$$

$$
\frac{R}{|\dot{Z}|} = \cos\theta, \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{|\dot{Z}|} = \sin\theta \text{より}
$$

$$
v = |\dot{Z}| I_m \sin(\omega t + \theta) \dots (3.72)
$$

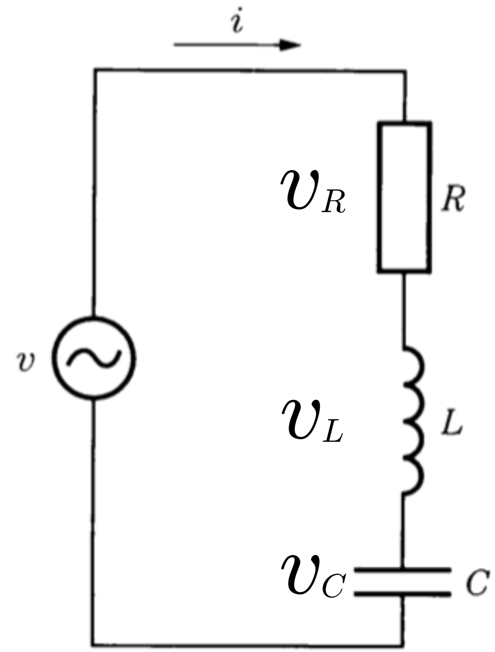


図 3.16

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著

今回のポイント

リアクタンスと抵抗が直列の場合

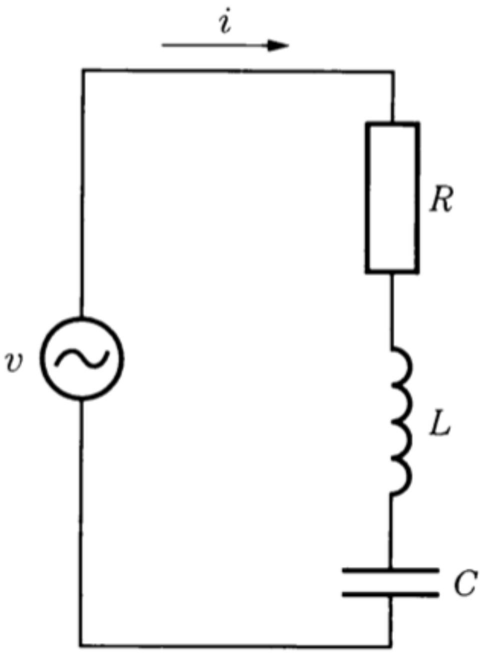
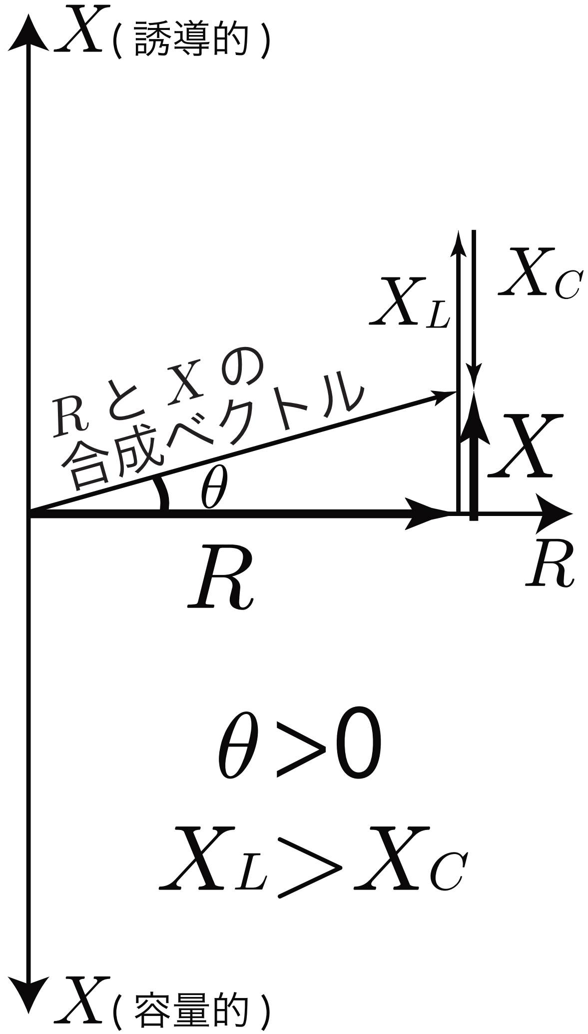
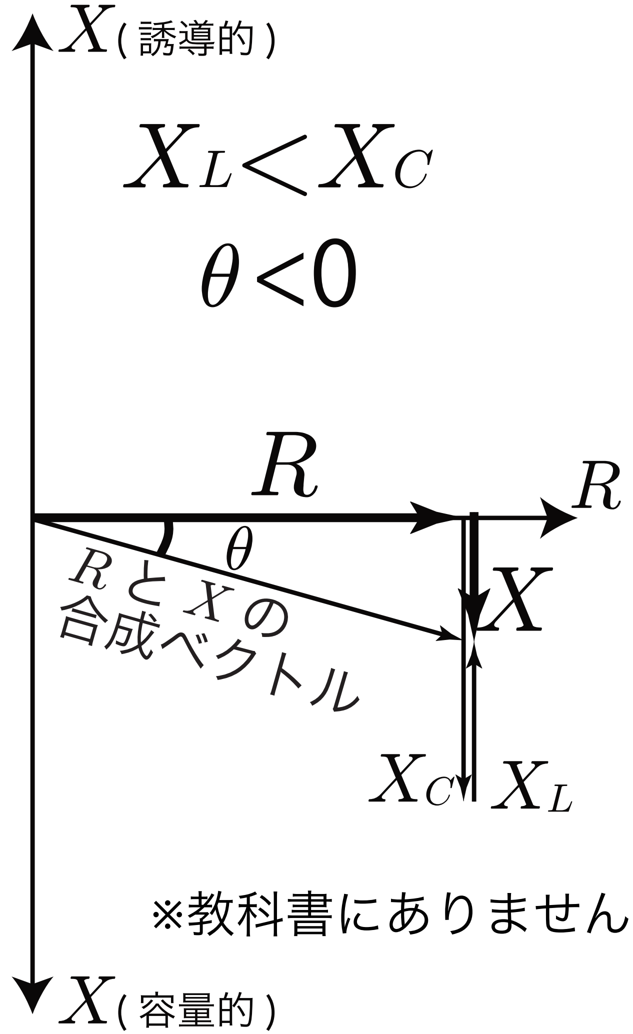


図 3.16

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著





※教科書にありません

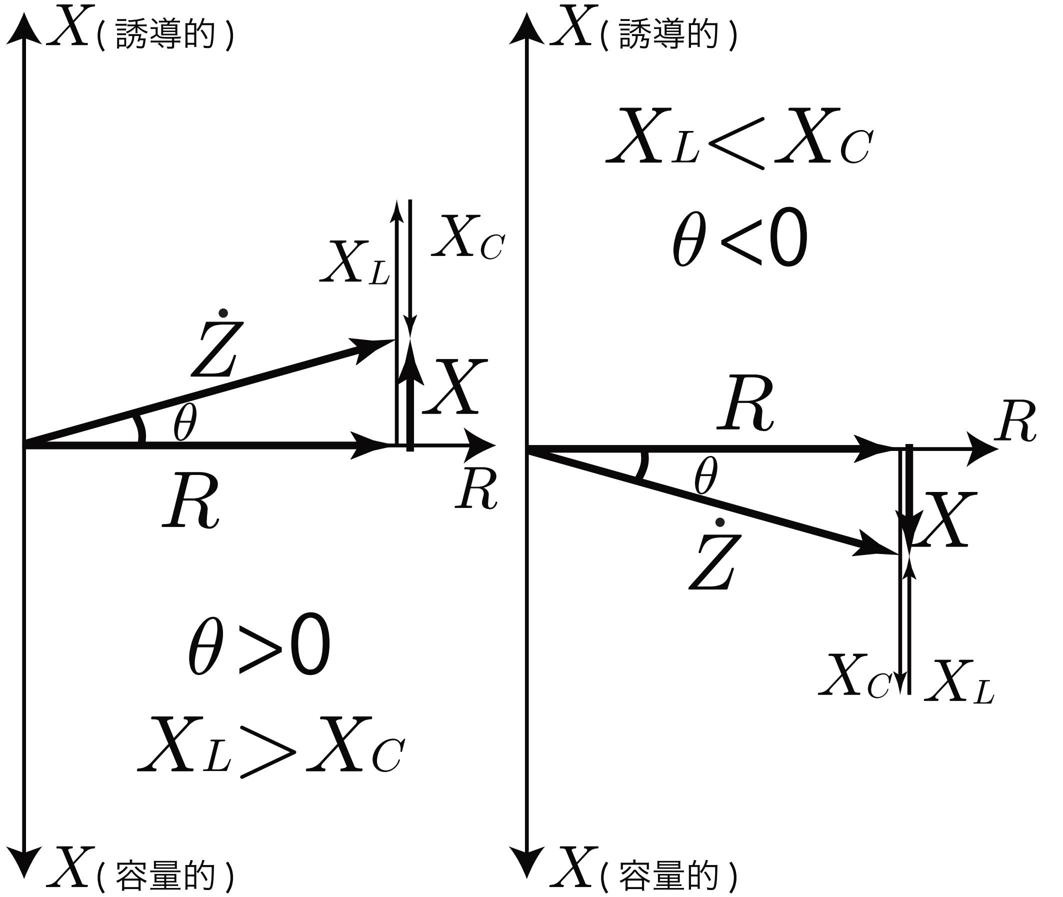
- **抵抗を水平方向、リアクタンスを垂直方向のベクトルとして扱う**
- リアクタンスX=X_L-X_C
- **RとXの合成ベクトルの成す角が電圧の電流に対する位相を表す**

R と X の合成ベクトルをインピーダンス $\dot{Z}$ と呼ぶ

インピーダンスの大きさ $|\dot{Z}|$ は実効値のオームの法則に使え、リアクタンスでは誘導性・容量性で暗記する必要があった位相 θ の関係も、オームの法則に従って「電流に位相 θ の影響を与えたのが電圧の位相」と考えれば良い。(初期位相が 0 の場合)

$$V = I|\dot{Z}| \ldots (3.75)'$$

$$\begin{aligned}
|\dot{Z}| &= \sqrt{R^2 + X^2} \ldots (3.76) \\
&= \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \\
&= \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \\
\theta &= \tan^{-1}\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) \\
&= \tan^{-1}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) \ldots (3.73)
\end{aligned}$$

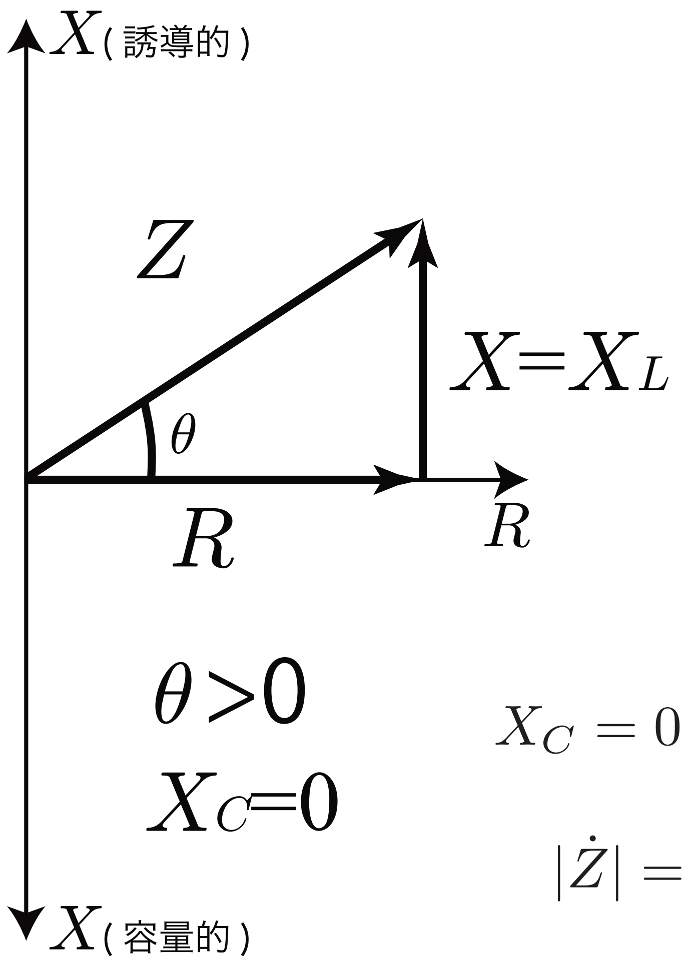


※教科書でも最終的にはインピーダンスをベクトルで扱う

RL, RC直列回路(p61-)

※RLC直列回路の特殊例

RLC直列回路でX_C=0としたのがRL直列回路



$$
\begin{aligned}
|\dot{Z}| &= \sqrt{R^2+X^2} \ldots (3.76) \\
&= \sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2} \\
&= \sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2} \\
\theta &= \tan^{-1}\left(\frac{X_L-X_C}{R}\right) \\
&= \tan^{-1}\left(\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}\right) \ldots (3.73)
\end{aligned}
$$

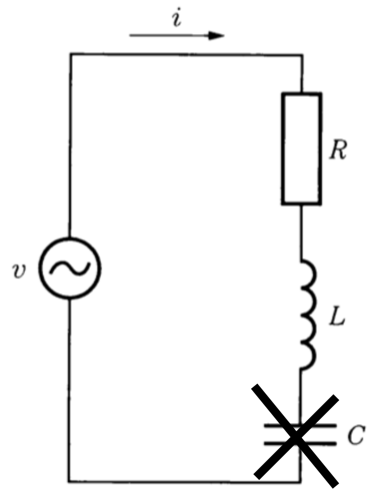


図 3.16

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光 著

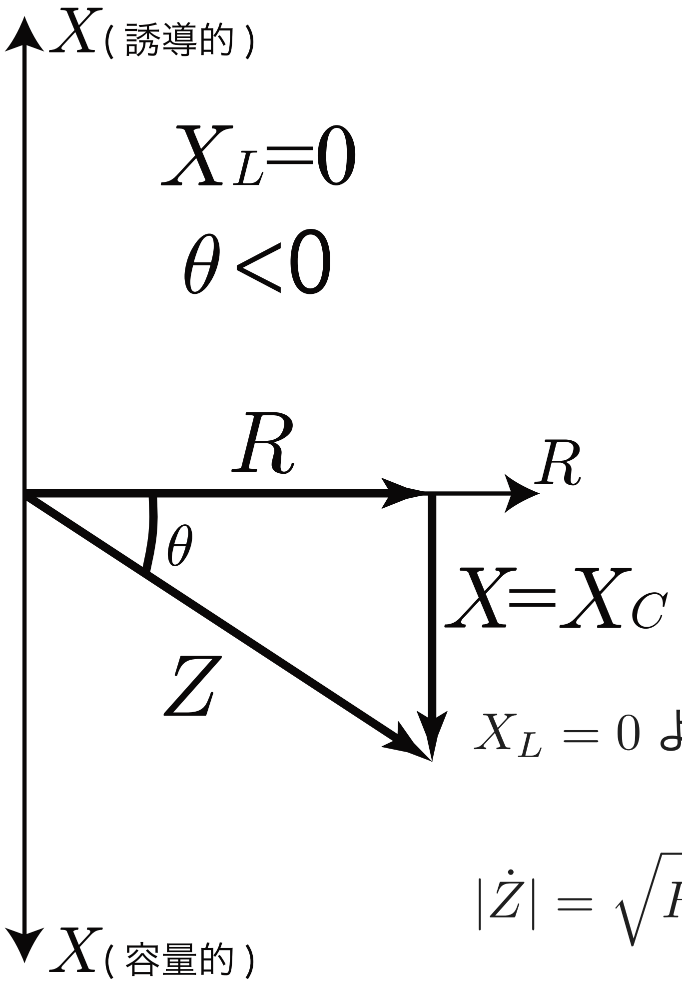
$X_C = 0$ より

$$|\dot{Z}| = \sqrt{R^2+X_L^2} = \sqrt{R^2+(\omega L)^2} \ldots (3.42)$$

実効値の電流電圧の関係は$V = |\dot{Z}|I = \sqrt{R^2+(\omega L)^2}I \ldots (3.41)$
で求まる。位相は

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{X_L}{R}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right) \ldots (3.43)$$

RLC直列回路でX_L=0としたのがRC直列回路



$$
\begin{aligned}
|\dot{Z}| &= \sqrt{R^2+X^2}\ldots(3.76)\\
&= \sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}\\
&= \sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}\\
\theta &= \tan^{-1}\left(\frac{X_L-X_C}{R}\right)\\
&= \tan^{-1}\left(\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R}\right)\ldots(3.73)
\end{aligned}
$$

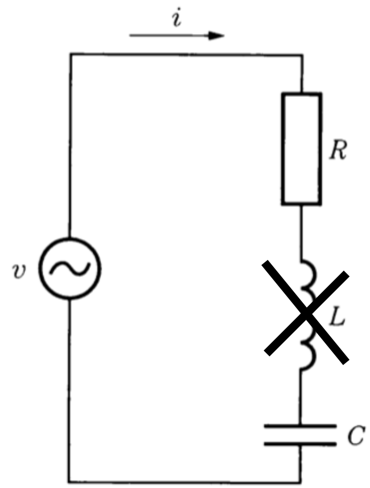


図 3.16

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著

$X_L=0$ より

$$|\dot{Z}|=\sqrt{R^2+X_C^2}=\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}\ldots(3.52)$$

実効値の電流電圧の関係は$V=|\dot{Z}|I=\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}I\ldots(3.51)$
で求まる。位相は

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{-X_C}{R}\right)=\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\omega CR}\right)\ldots(3.53)'$$

※負の角度で求めた方が進み遅れが明確になる

例題3.7 (p.63)

$R = 3[\Omega], L = 10[mH]$ である。交流電流 $i = 2\sin 400t[A]$ が流れたとき、加えられた電圧の瞬時値 v を求めよ。また、ωt に対する v, i の波形を 2 周期分描け。

例題3.7 (p.63)の出題意図

$|Z|$とθを求める　　　　　　　　ω=400

$R = 3[\Omega], L = 10[mH]$である。交流電流$i = 2\sin 400t[A]$

I_m=2, I=2/$\sqrt{2}$, V=$|Z|I$

が流れたとき、加えられた電圧の瞬時値vを求めよ。ま

θとVを基にする

た、ωtに対するv, iの波形を2周期分描け。

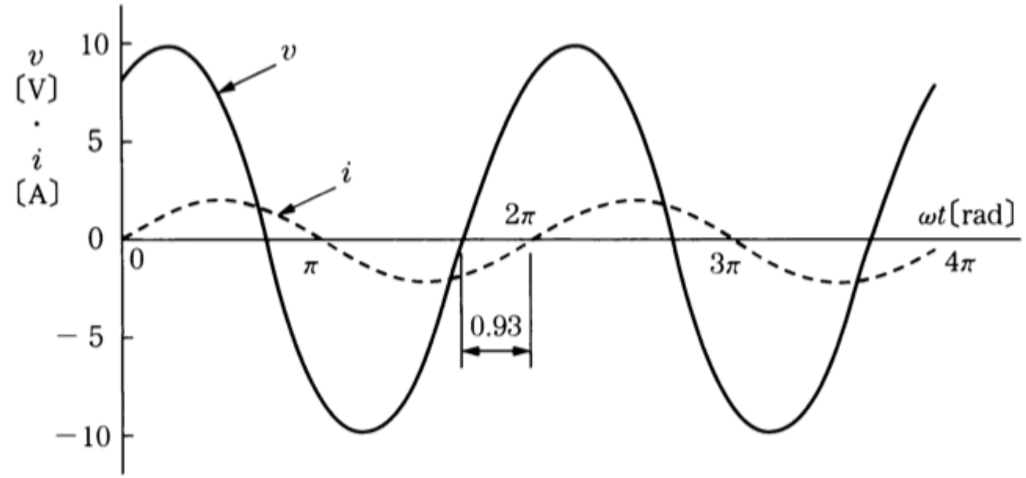
横軸は[rad]で0〜4πまで

例題3.7の解答例(I)

$$
\begin{aligned}
|\dot{Z}| &= \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \\
&= \sqrt{3^2 + (400 \times 10 \times 10^{-3})^2} = 5[\Omega] \\
\theta &= \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \simeq 53.1^\circ \simeq 0.927[rad]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_m &= |\dot{Z}| I_m = 5 \times 2 = 10[V] \\
v &= 10 \sin(400t + 0.93) \text{ または } 10 \sin(400t + 53.1^\circ)[V]
\end{aligned}
$$

電圧は電流より 0.927[rad] 進む。



例図3.1

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著

例題3.7の解答例(2)

- 電卓では
  - [2ndF][x^2][(] 3 [x^2][+][(] 400 [×] 10[Exp][(-)] 3 [)][x^2][)][=] (この問題はピタゴラス数($3^2+4^2=5^2$)なのでZの計算は不要)
- より高度な使い方
  - 400 [×] 10 [Exp][(-)] 3 [=][STO][CNST](変数AにX_Lを代入)→ [2ndF][x^2][(] 3 [x^2][+][RCL][CONST](Aを呼び出し)[x^2][)][=]
  - [2ndF][tan][(] [RCL][CONST](Aを呼び出し) [÷] 3 [)][=][2ndF][・](DRG▶で変換)

例題 3.8 (p.67)

$R = 2[\Omega], C = 500[\mu F]$ である。交流電流 $i = 3\sin 1000t[A]$ が流れたとき加えられた電圧の瞬時値 v を求めよ。また、ωt に対する v, i の波形を 2 周期分描け。

例題 3.8 (p.67)の出題意図

$|Z|$とθを求める

$R = 2[\Omega], C = 500[\mu F]$ である。交流電流 $i =$

ω=1000

$3\sin 1000t[A]$ が流れたとき加えられた電圧の瞬時

I_m=3, I=3/$\sqrt{2}$, V=$|Z|I$

値 v を求めよ。また、ωt に対する v, i の波形を 2 周

θとVを基にする

横軸は[rad]で0〜4πまで

期分描け。

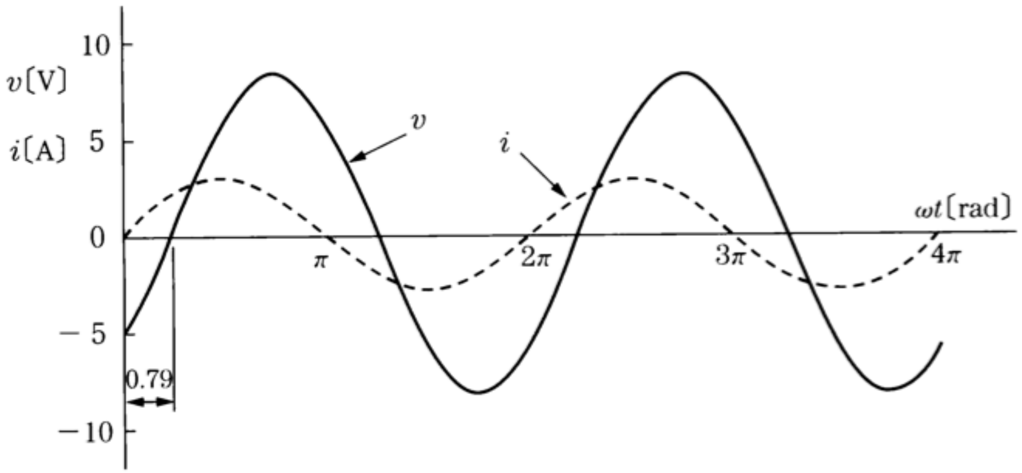
例題3.8の解答例(I)

$$|\dot{Z}| = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2}$$
$$= \sqrt{2^2 + \left(\frac{1}{1000 \times 500 \times 10^{-6}}\right)^2} = 2\sqrt{2} \simeq 2.83[\Omega]$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-\frac{1}{\omega C}}{R}\right) = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{\omega CR}\right) = \tan^{-1}(-1) = -45^\circ = -\frac{\pi}{4}[rad]$$

$$V_m = |\dot{Z}|I_m = 2\sqrt{2} \times 3 = 6\sqrt{2} \simeq 8.49[V]$$
$$v = 8.49\sin\left(1000t - \frac{\pi}{4}\right) \text{または} \ 8.49\sin(1000t - 45^\circ)[V]$$

電圧は電流より $\frac{\pi}{4}[rad]$ 遅れる。



例図 3.2

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著

例題3.8の解答例(2)

- 電卓では
  - [2ndF][x^2][(] 2 [x^2][+][(] 1000 [×] 500[Exp] [(-)] 6 [)][y^x][(-)] 2 [)][=]
- より高度な使い方
  - [(] 1000 [×] 500 [Exp][(-)] 6 [)][2ndF][2](x^{-1}の意) [=][STO][ln](変数EにX_Cを代入)→ [2ndF][x^2][(] 2 [x^2][+][RCL][ln](Eを呼び出し) [x^2][)][=]
  - [2ndF][tan][(] [RCL][ln](Eを呼び出し) [÷] 2 [)][=][2ndF][・](DRG▶で変換)