電気回路I及び演習

5. フェーザ表示と複素数

学習目標

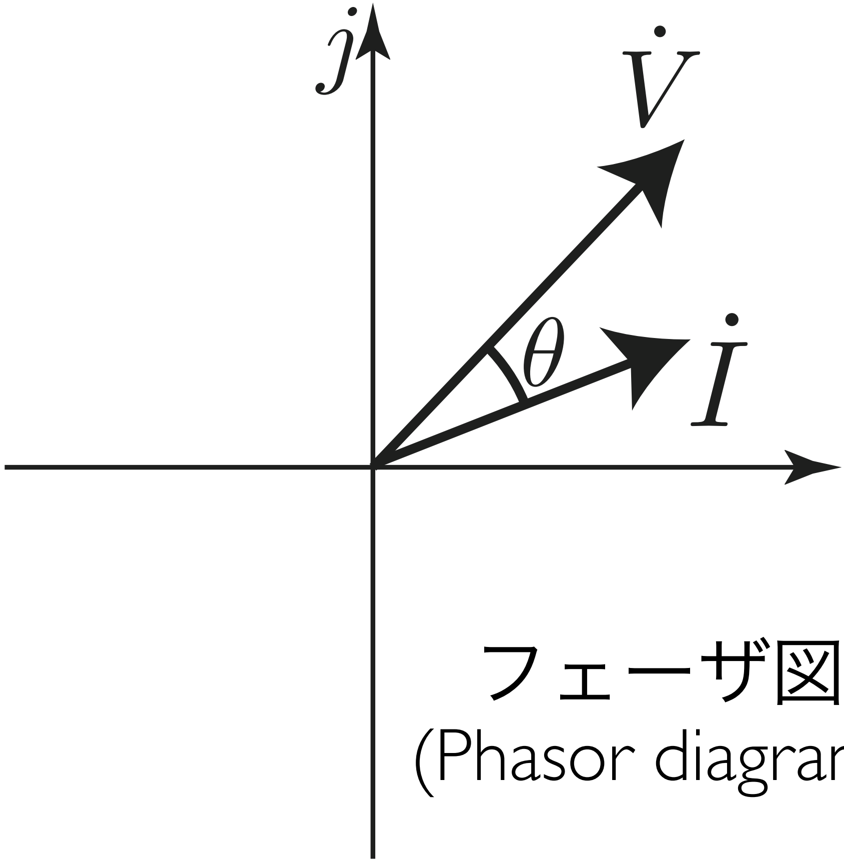
- 複素数表示の種類と利点を理解する
- 複素数の演算を手早く確実に行なえるように関数電卓の使用方法を習得する
- 瞬時値と複素電圧・複素電流との変換方法を理解する
- フェーザおよびフェーザ表示とは何か理解する

交流回路の計算は面倒

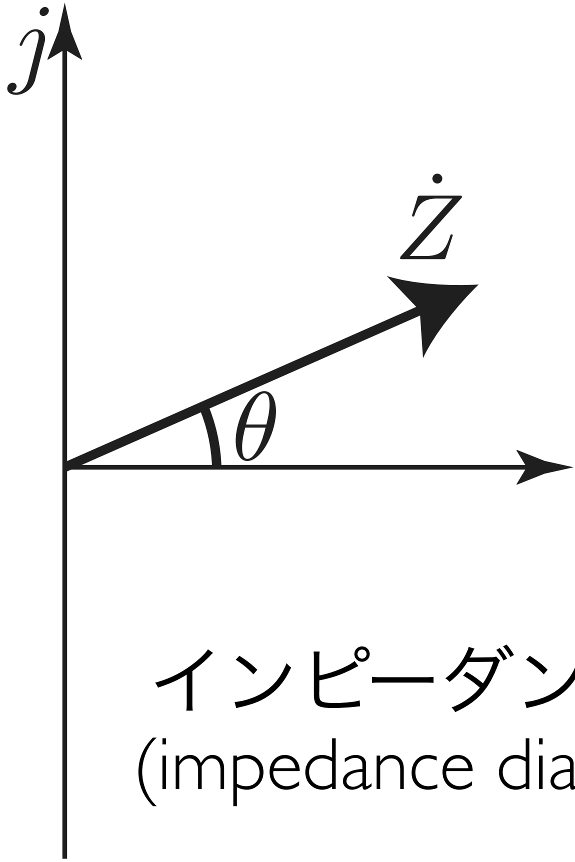
- 正弦波を含む時間の関数の計算が必要
- 抵抗とリアクタンスは混ざらない
- 位相の関係がわかりにくい
- 電圧や電流の実効値と位相だけで、計算できる場合が多いのに余計な情報が多い

複素数を使って
回路の解析を楽にする

やりたいこと



フェーザ図
(Phasor diagram)



インピーダンス図
(impedance diagram)

電圧、電流、インピーダンスを
ベクトルで扱いたい

複素数を適用すると

- インピーダンスの四則演算が楽
- 交流正弦波もベクトルで表わせる
- 位相とその進み、遅れが可視化できる
- 電流、電圧、インピーダンスがベクトルの計算で完了する
- 関数電卓を使って楽できる

4.1複素数の導入(p.83)

複素数

複素数の表記:$\boldsymbol{Z}, \vec{Z}, \dot{Z}$

$$\dot{Z} = a + jb \ldots (4.1)$$

虚数単位 $j = \sqrt{-1}$, 実部 $a = \mathfrak{Re}(\dot{Z})$, 虚部 $b = \mathfrak{Im}(\dot{Z})$

$\mathfrak{Re}$: Real part (実部), $\mathfrak{Im}$: Imaginary part (虚部)

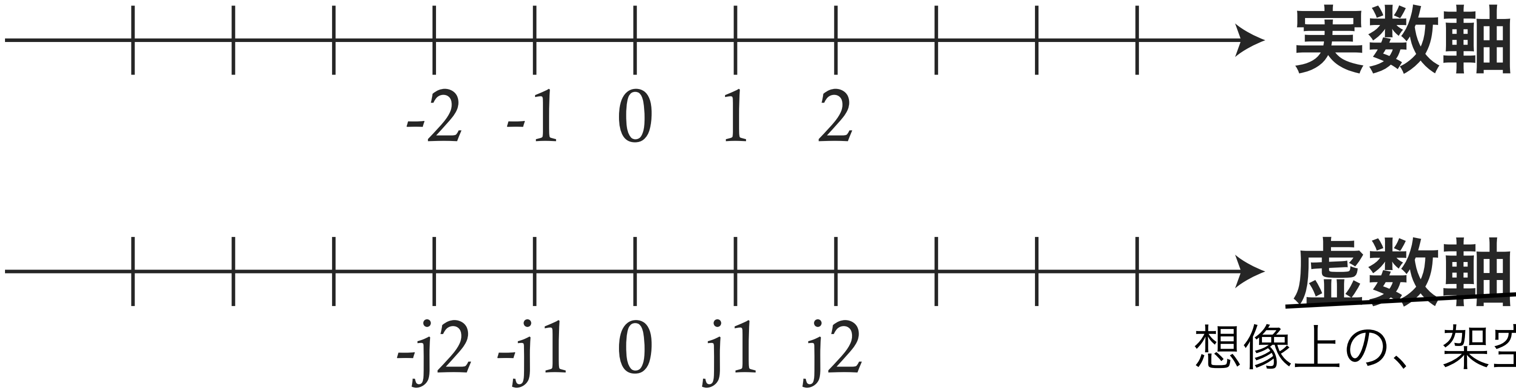
- 実数と虚数
  - aとbは実数
- **虚数単位は電流 iと間違えるので j を用いる**

虚数単位j

$$
\begin{gathered}
j \times j = -1 \\
j \times j \times j = -j \\
j \times j \times j \times j = 1 \\
j \times j \times j \times j \times j = j \\
j \times j \times j \times j \times j \times j = -1 \\
j \times j \times j \times j \times j \times j \times j = -j \\
j \times j \times j \times j \times j \times j \times j \times j = 1 \\
j \times j \times j \times j \times j \times j \times j \times j \times j = j \\
j \times j \times j \times j \times j \times j \times j \times j \times j \times j = -1 \\
\vdots
\end{gathered}
$$

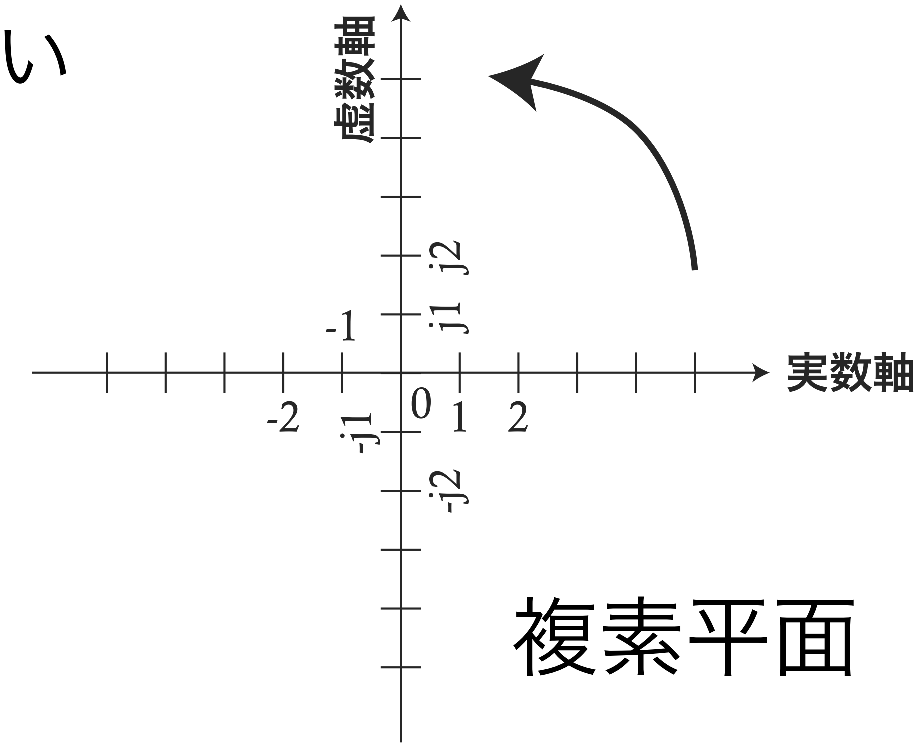
$$
\begin{gathered}
j \div j = 1 \\
j \div j \div j = -j \\
j \div j \div j \div j = -1 \\
j \div j \div j \div j \div j = j \\
j \div j \div j \div j \div j \div j = 1 \\
j \div j \div j \div j \div j \div j \div j = -j \\
j \div j \div j \div j \div j \div j \div j \div j = -1 \\
j \div j \div j \div j \div j \div j \div j \div j \div j = j \\
j \div j \div j \div j \div j \div j \div j \div j \div j \div j = 1 \\
\vdots
\end{gathered}
$$

複素数の考え方



想像上の、架空の、空想の

- 全く別の物という認識で良い
  - →混ぜられない2つの数
  - →「直交する」



複素平面

複素平面での複素数の表現(p84)

極座標系 $\dot{Z} = |\dot{Z}|\angle\theta \ldots (4.12)$

$$\text{動径, 大きさ } |\dot{Z}| = \sqrt{a^2 + b^2} \ldots (4.3)$$

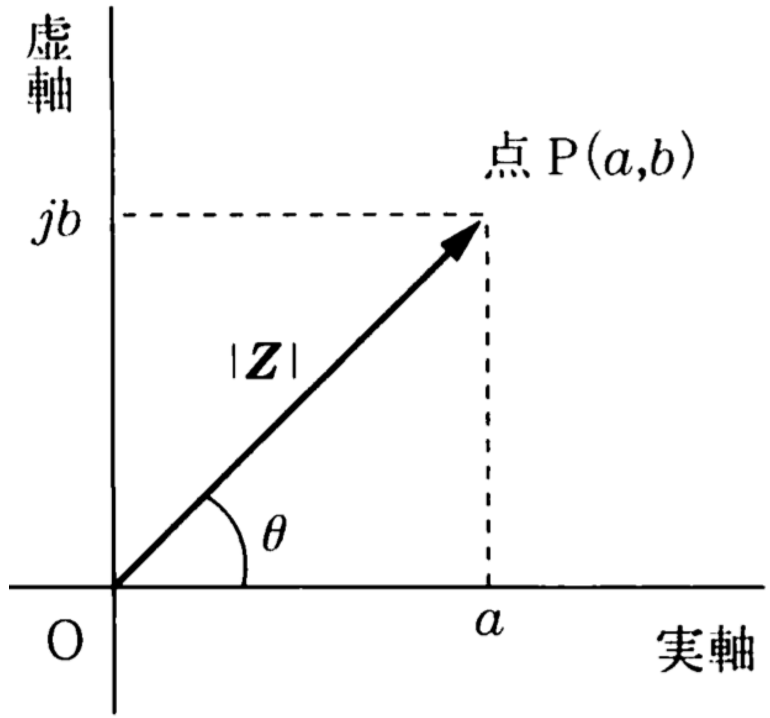
$$\text{偏角}\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

直交座標系 $a + jb$

$$\begin{aligned} a &= |\dot{Z}|\cos\theta \ldots (4.2) \\ b &= |\dot{Z}|\sin\theta \\ \dot{Z} &= a + jb \ldots (4.1) \\ &= |\dot{Z}|(\cos\theta + j\sin\theta) \ldots (4.4) \\ &= |\dot{Z}|e^{j\theta} \ldots (4.11) \end{aligned}$$

オイラーの公式: $e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j\sin\theta \ldots (4.10)$

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著



平面上の点Pが複素数を意味しベクトルとして扱える

複素数の表示法(p85-86)

$$e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j\sin\theta \ldots (4.10)$$

$\dot{Z} = |\dot{Z}|(\cos\theta + j\sin\theta) \ldots (4.4)$ に適用すると

$$\begin{aligned}\dot{Z} &= a + jb \ldots (4.1)(\text{直角座標形式: Rectangular form})\\ &= |\dot{Z}|(\cos\theta + j\sin\theta) \ldots (4.4)\\ &= |\dot{Z}|e^{j\theta} \ldots (4.11)(\text{指数関数形式: Exponential form})\\ &= |\dot{Z}|\angle\theta \ldots (4.12)(\text{極座標形式: Polar(Steinmets) form})\end{aligned}$$

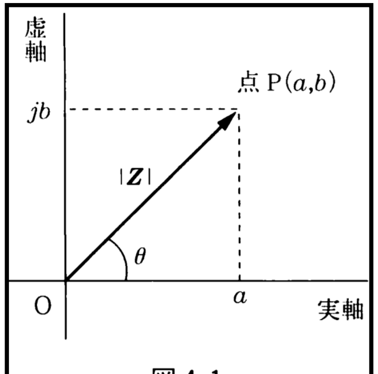


図 4.1

※訂正

1. p86 ~~フェーザ形式~~→極座標形式(極形式)
2. (4.11)は指数関数形式

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著

実数

実数系は有理数と無理数とから成立している．全有理数の一連の系は直線上のすべての点の一連の系と1対1の対応をなすがゆえに，この直線のことを**Real number line**と称し，図4－1のように線上の1点は1つの実数を，1つの実数は直線上の1点を表わすことになる．この実数系では足し算，引算，掛算，割算はどの数についてでも行うことができる．正の実数についての平方根はreal number line上に対応点として表わすことができる．しかし，負の実数の平方根は実数系には含まれない．

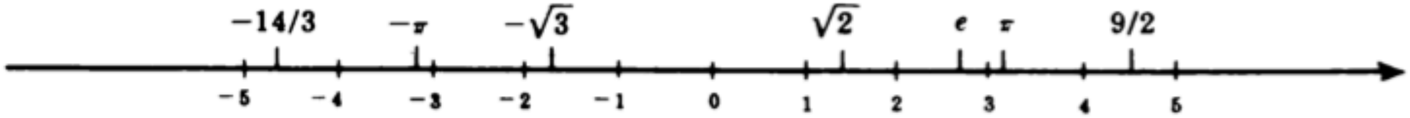


図4－1　実数軸

虚数

負の実数の平方根は純**虚数**と呼ばれ，$\sqrt{-1}$，$\sqrt{-2}$，$\sqrt{-5}$，$\sqrt{-16}$などである．

もし，$j=\sqrt{-1}$とおくならば，$\sqrt{-2}=j\sqrt{2}$，$\sqrt{-4}=j2$，$\sqrt{-5}=j\sqrt{5}$のようになる．

また，$j^2=-1$，$j^3=j^2\cdot j=(-1)j=-j$，$j^4=(j^2)^2=1$，$j^5=j$，…ということになる．

純虚数の全部は**Imaginary number line**と呼ばれる直線上の点で図4－2のように表わすことができる．

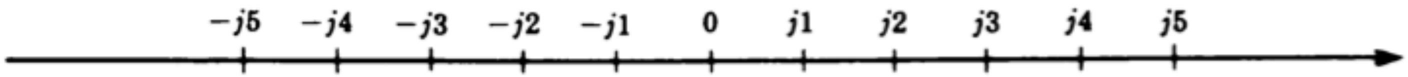


図4－2　虚数軸

用語として「虚」が採用されたことは，結果的には芳しいことではない．なぜならば，虚数は間違いなく実在している数である．実数と同時にreal number line上に対応点をとることができないというだけのことで，別のnumber line上であれば位置できる数である．

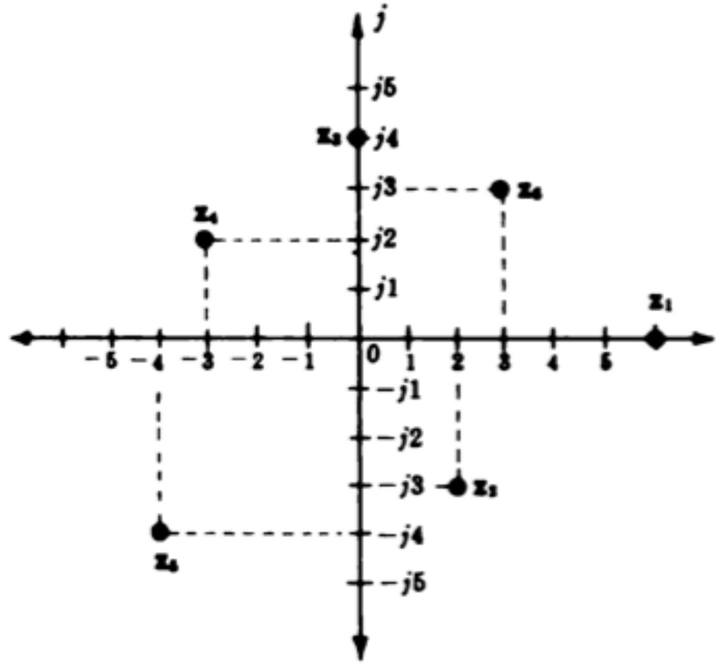
複素数

複素数とは，実数 x と y ，および$j=\sqrt{-1}$を組み合わせて$x+jy$の形をもった数のことである．複素数$x+jy$の x は実数部，jyは虚数部と呼ばれる． x が0であれば複素数は純虚数となり， j 軸上の点に対応する．同様に， $y=0$ ならば，複素数は実数で実数軸上の点に対応する．このように，複素数とは実数の全部および虚数の全部を含むものである．

2つの複素数，$a+jb$と$c+jd$が等しいということは，$a=c$ $b=d$のときのみを意味する．

もし，図4－3のように実数軸が虚数軸に原点0で直角であるならば，複素平面上の1点は1つの複素数を表わし，その逆もまた成立する．図4－3の中に複素数4つを示しておく．

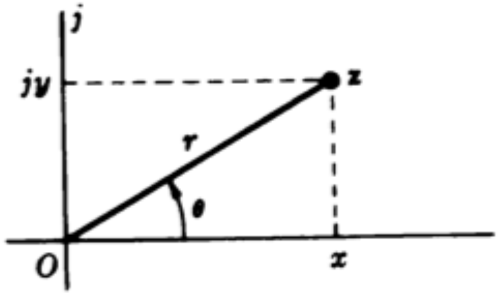
$$
\begin{aligned}
\mathbf{z}_1 &= 6\\
\mathbf{z}_2 &= 2 - j3\\
\mathbf{z}_3 &= j4\\
\mathbf{z}_4 &= -3 + j2\\
\mathbf{z}_5 &= -4 - j4\\
\mathbf{z}_6 &= 3 + j3
\end{aligned}
$$



Source: マグロウヒル大学講義 電気回路,J.A. Edminister p43

複素数の表わし方

図4－4で，$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$，複素数 z は



複素数Zの
極座標表示

図4－4

$$z = x + jy = r(\cos\theta + j\sin\theta)$$

である．なお，$r = \sqrt{x^2 + y^2}$は z の**絶対値**または**動径**と呼ばれ，角度 $\theta = \tan^{-1} y/x$ は z の**偏角**と呼ばれている．

オイラーの公式$e^{j\theta} = (\cos\theta + j\sin\theta)$は複素数のもう1つ別の表わし方を提供し，**exponential form**（問題4．1参照）と呼ばれている．

$$z = r\cos\theta + jr\sin\theta = re^{j\theta}$$

極座標方式またはスタインメッツ方式と呼ばれる複素数 z の表わし方は，回路解析で広く利用されており，

$$r \underline{/\ \theta}$$

と記号化するもので，θは通常度数を使用する．

Source: マグロウヒル大学講義 電気回路, J. A. Edminister p44

以上4つの方法のうちのいずれで表わされた複素数であっても，以下のような形で記述される．どれを使用するかは演算のやりやすさによって決まる．

Rectangular form	$\mathbf{z}=x+jy$
Polar or Steinmetz form	$\mathbf{z}=r\underline{/\theta}$
Exponential form	$\mathbf{z}=re^{j\theta}$
Trigonometric form	$\mathbf{z}=r(\cos\theta+j\sin\theta)$

Source: マグロウヒル大学講義 電気回路, J. A. Edminister p44

複素数の計算(加減算)(p.86)

$$\begin{aligned}\dot{Z}_1 &= a_1 + jb_1 = |\dot{Z}_1|e^{j\theta_1} = |Z_1|\angle\theta_1 \\ \dot{Z}_2 &= a_2 + jb_2 = |\dot{Z}_2|e^{j\theta_2} = |Z_2|\angle\theta_2\end{aligned}$$

のとき

$$\begin{aligned}\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 &= (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2) \ldots (4.13) \\ \dot{Z}_1 - \dot{Z}_2 &= (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2) \ldots (4.14)\end{aligned}$$

複素数の加算と減算は実部と虚部を別々に加減算するだけなので直角座標形式を用いる

$$\begin{aligned}\dot{Z} &= a + jb \ldots (4.1)(\text{直角座標形式: Rectangular form}) \\ &= |\dot{Z}|(\cos\theta + j\sin\theta) \ldots (4.4) \\ &= |\dot{Z}|e^{j\theta} \ldots (4.11)(\text{指数関数形式: Exponential form}) \\ &= |\dot{Z}|\angle\theta \ldots (4.12)(\text{極座標形式: Polar(Steinmets) form})\end{aligned}$$

複素数の乗除算は指数関数形式か極座標形式が便利

$$
\begin{aligned}
\dot{Z}_1\dot{Z}_2 &= (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) \\
&= (a_1a_2 - b_1b_2) + j(a_1b_2 + a_2b_1) \ldots (4.15) \\
&= |\dot{Z}_1|e^{j\theta_1} \cdot |\dot{Z}_2|e^{j\theta_2} = |\dot{Z}_1||\dot{Z}_2|e^{j(\theta_1+\theta_2)} \ldots (4.16) \\
&= |\dot{Z}_1||\dot{Z}_2|\angle(\theta_1 + \theta_2)
\end{aligned}
$$

※指数関数の法則通りの計算

$$
\begin{aligned}
\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2} &= \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{(a_2 + jb_2)(a_2 - jb_2)} \\
&= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} \ldots (4.17) \\
&= \frac{|\dot{Z}_1|e^{j\theta_1}}{|\dot{Z}_2|e^{j\theta_2}} = \frac{|\dot{Z}_1|}{|\dot{Z}_2|}e^{j(\theta_1-\theta_2)} \ldots (4.18) \\
&= \frac{|\dot{Z}_1|}{|\dot{Z}_2|}\angle(\theta_1 - \theta_2)
\end{aligned}
$$

※指数関数の法則通りの計算

$$
\begin{aligned}
\dot{Z} &= a + jb \ldots (4.1)(\text{直角座標形式: Rectangular form}) \\
&= |\dot{Z}|(\cos\theta + j\sin\theta) \ldots (4.4) \\
&= |\dot{Z}|e^{j\theta} \ldots (4.11)(\text{指数関数形式: Exponential form}) \\
&= |\dot{Z}|\angle\theta \ldots (4.12)(\text{極座標形式: Polar(Steinmets) form})
\end{aligned}
$$

共役複素数(p.86,87; conjugate complex number)

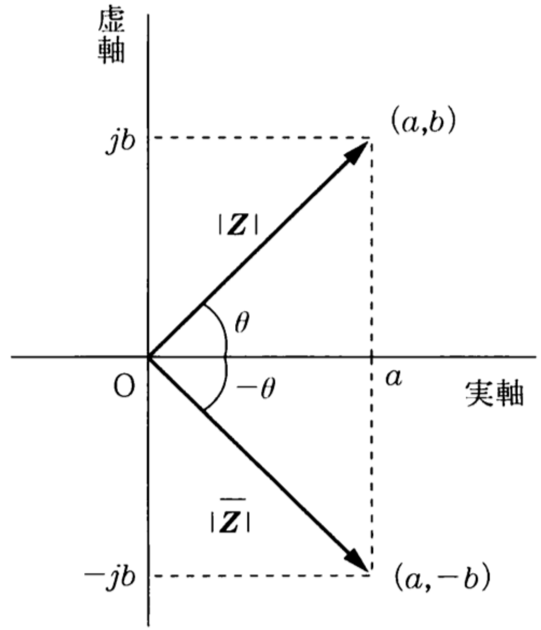


図 4.2

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著

$\dot{Z}$ の共役複素数は $\bar{\dot{Z}}$ と表し、

$$
\begin{aligned}
\dot{Z} &= a \pm jb = |\dot{Z}|(\cos\theta \pm j\sin\theta) \\
&= |\dot{Z}|e^{\pm j\theta} = |\dot{Z}|\angle \pm\theta \ldots (4.19) \\
\bar{\dot{Z}} &= a \mp jb = |\dot{Z}|(\cos\theta \mp j\sin\theta) \\
&= |\dot{Z}|e^{\mp j\theta} = |\dot{Z}|\angle \mp\theta \ldots (4.20)
\end{aligned}
$$

となり、実軸に対して線対称となる。また、

$$
\dot{Z}\bar{\dot{Z}} = |\dot{Z}|e^{\pm j\theta} \cdot |\dot{Z}|e^{\mp j\theta} = |\dot{Z}||\dot{Z}|e^{(\pm j\theta \mp j\theta)} = |\dot{Z}|^2 \ldots (4.21)
$$

ベクトル演算子(p.87)

複素数にjを掛けると偏角θがπ/2進む

複素数に-jを掛ける(jで割る)と偏角θがπ/2遅れる

jの乗除算は大きさはそのままな偏角の回転(進み・遅れ)を意味する

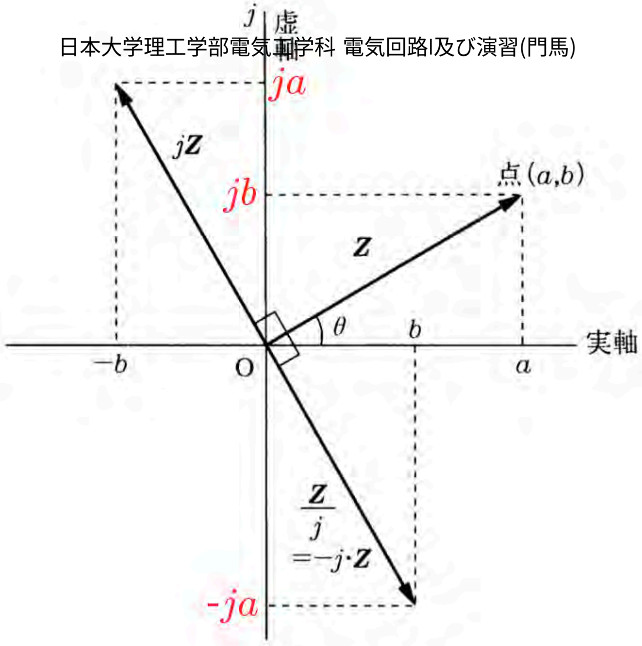


図 4.3

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著

$$j \times j = -1$$
$$j \times j \times j = -j$$
$$j \times j \times j \times j = 1$$
$$j \times j \times j \times j \times j = j$$
$$j \times j \times j \times j \times j \times j = -1$$
$$j \times j \times j \times j \times j \times j \times j = -j$$
$$j \times j \times j \times j \times j \times j \times j \times j = 1$$
$$j \times j \times j \times j \times j \times j \times j \times j \times j = j$$
$$j \times j \times j \times j \times j \times j \times j \times j \times j \times j = -1$$
$$\vdots$$

$$j \div j = 1$$
$$j \div j \div j = -j$$
$$j \div j \div j \div j = -1$$
$$j \div j \div j \div j \div j = j$$
$$j \div j \div j \div j \div j \div j = 1$$
$$j \div j \div j \div j \div j \div j \div j = -j$$
$$j \div j \div j \div j \div j \div j \div j \div j = -1$$
$$j \div j \div j \div j \div j \div j \div j \div j \div j = j$$
$$j \div j \div j \div j \div j \div j \div j \div j \div j \div j = 1$$
$$\vdots$$

$$\frac{1}{j} = \frac{j}{jj} = \frac{j}{-1} = -j \ldots (4.26)$$

例題4.1(p.89)

複素数 $\dot{Z}_1 = 2\sqrt{3} + j2, \dot{Z}_2 = 3 - j3\sqrt{3}$ とするとき、これらの複素数の加減乗除を求めよ。

(※角度は[°]を用いよ)

例題4.1の解答

複素数 $\dot{Z}_1 = 2\sqrt{3} + j2, \dot{Z}_2 = 3 - j3\sqrt{3}$ とするとき、これらの複素数の加減乗除を求めよ。 (※角度は[°]を用いよ)

$$
\begin{aligned}
\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 &= (2\sqrt{3} + j2) + (3 - j3\sqrt{3}) = (2\sqrt{3} + 3) + j(2 - 3\sqrt{3}) \simeq 6.46 - j3.20 \\
\dot{Z}_1 - \dot{Z}_2 &= (2\sqrt{3} + j2) - (3 - j3\sqrt{3}) = (2\sqrt{3} - 3) + j(2 + 3\sqrt{3}) \simeq 0.464 + j7.20 \\
|\dot{Z}_1| &= \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4, \theta_1 = \tan^{-1}\frac{2}{2\sqrt{3}} = 30^\circ \\
|\dot{Z}_2| &= \sqrt{3^2 + (-3\sqrt{3})^2} = 6, \theta_2 = \tan^{-1}\frac{-3\sqrt{3}}{3} = -60^\circ \\
\dot{Z}_1 &= 4e^{j30^\circ} = 4\angle 30^\circ, \dot{Z}_2 = 6e^{-j60^\circ} = 6\angle(-60^\circ) \\
\dot{Z}_1\dot{Z}_2 &= 4 \times 6e^{j(30^\circ + (-60^\circ))} = 24e^{-j30^\circ} \simeq 20.8 - j12.0 \\
&= 4\angle 30^\circ \times 6\angle(-60^\circ) = 24\angle(30^\circ + (-60^\circ)) = 24\angle -30^\circ \simeq 20.8 - j12.0 \\
\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2} &= \frac{4}{6}e^{j(30^\circ - (-60^\circ))} = 0.667e^{j90^\circ} \simeq j0.667 \\
&= \frac{4\angle 30^\circ}{6\angle(-60^\circ)} \simeq 0.667\angle(30^\circ - (-60^\circ)) = 0.667\angle 90^\circ = j0.667
\end{aligned}
$$

※最終形は直角座標、指数関数、極座標形式のいずれを用いても良い。

複素数計算 (電卓マニュアルp69)

- 電気回路I及び演習で使う
- 複素数の加減乗除
- 複素平面での直交座標 ←→極座標
- [MODE][3]でモード変更
- [MATH][0]で共役複素数 (Conjugate)

複素数の加減乗除算を行うことができます。複素数計算を行うときは [MODE] [3] と押して複素数モードにしてください。

複素数計算においては、演算結果を表示するための２つのシステムがあります。

① 直交座標システム（*xy* シンボル点灯）：
[2ndF] [→xy]

② 極座標システム（*rθ* シンボル点灯）：
[2ndF] [→rθ]

複素数の入力形式

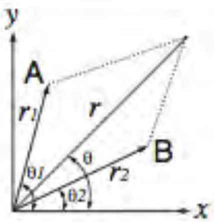
① 直交座標
x 座標 [+] *y* 座標 [*i*]、または
x 座標 [+] [(] [−] [)] [*i*] *y* 座標

② 極座標
r [∠] θ
r：絶対値　　θ：偏角

- 複素数モードで記憶した独立メモリー (M) やラストアンサーメモリー (ANS) の値は、他のモードへのモード変更により虚数部の値をクリアします。
- 直交座標形式における *y* 座標、または極座標形式における偏角が０のときは、実数とみなします。

Source: SHARP EL-520Jマニュアル

複素数の計算例(電卓マニュアルp70)

$(12-6i)+(7+15i)-(11+4i)=$	[MODE] [3] 12 [−] 6 [i] [+] 7 [+] 15 [i] [−] [(] 11 [+] 4 [i] [)] [=]	8. +5.i
$6\times(7-9i)\times(-5+8i)=$	6 [×] [(] 7 [−] 9 [i] [)] [×] [(] [(−)] 5 [+] 8 [i] [)] [=]	222. +606.i
$16\times(\sin 30^\circ+i\cos 30^\circ)\div(\sin 60^\circ+i\cos 60^\circ)=$	16 [×] [(] [sin] 30 [+] [i] [cos] 30 [)] [÷] [(] [sin] 60 [+] [i] [cos] 60 [)] [=]	13.85640646 +8.i
 $r_1=8,\ \theta_1=70^\circ$ $r_2=12,\ \theta_2=25^\circ$ $\rightarrow r=?,\ \theta=?^\circ$	[2ndF] [→rθ] 8 [∠] 70 [+] 12 [∠] 25 [=]	18.5408873 ∠42.76427608

$1+i$ $\rightarrow r=?,\ \theta=?^\circ$	[2ndF] [→xy] 1 [+] [i] [=] [2ndF] [→rθ]	1. +1.i 1.414213562 ∠45.
$(2-3i)^2=$	[2ndF] [→xy] [(] 2 [−] 3 [i] [)] [x^2] [=]	-5. -12.i
$\dfrac{1}{1+i}=$	[(] 1 [+] [i] [)] [2ndF] [x^{-1}] [=]	0.5 -0.5i
CONJ$(5+2i)=$	[MATH] [0] [(] 5 [+] 2 [i] [)] [=]	5. -2.i

Source: SHARP EL-520Jマニュアル

複素数以外でも[x^{-1}]はよく使う

電卓で解く例題4.1

複素数 $\dot{Z}_1 = 2\sqrt{3} + j2, \dot{Z}_2 = 3 - j3\sqrt{3}$ とするとき、これらの複素数の加減乗除を求めよ。

- [2nd F][SET UP][0 (DRG)][0 (DEG)]: Degreeを使う
- [MODE][3 (CPLX)]: 複素数モード([MODE][0]で戻る
- [( ]2[√]3 + [i] 2[ )] + [( ] 3 [-][i] 3 [√]3[ )][=]
- [2ndF][→xy]: 直角座標形式で表示
- [2ndF][→rθ]: 極座標形式で表示

電卓で解く例題4.1

複素数 $\dot{Z}_1 = 2\sqrt{3} + j2, \dot{Z}_2 = 3 - j3\sqrt{3}$ とするとき、これらの複素数の加減乗除を求めよ。

- 減算
  - [( ]2[√]3 + [i] 2[ )] - [( ] 3 [-][i] 3 [√]3[ )][=]
- 直角座標と極座標の変換
  - [( ]2[√]3 + [i] 2[ )][=][2ndF][→xy]または[→rθ]
  - 簡単に変換が可能
- [2ndF][→xy]: 直角座標形式で表示
- [2ndF][→rθ]: 極座標形式で表示

電卓で解く例題4.1

複素数 $\dot{Z}_1 = 2\sqrt{3} + j2, \dot{Z}_2 = 3 - j3\sqrt{3}$ とするとき、これらの複素数の加減乗除を求めよ。

- 極座標形式の入力(4∠30°と6∠(-60°)の乗除算)
    - 4[∠]30[×] 6 [∠][(-)]60[=]
    - 4[∠]30[÷] 6 [∠][(-)]60[=]
- [2ndF][→xy]: 直角座標形式で表示
- [2ndF][→rθ]: 極座標形式で表示

電卓で複素数を計算する際の注意

- 角度がDEGかRADかを確認する(GRADは論外)
- 表示形式がxyかrθかを確認する
- 括弧を多用した方がミスが少ない
  - 例: (100√2)[∠](60)
- メモリ演算は1つしか使えない(M)
- 後で確認できるよう全部を一気に計算しない

Q. 12

以下の複素数の四則演算をせよ

(1) $(2+3i)+(3-2i)$

(2) $(2+3i)-(3-2i)$

(3) $(2+3i)\times(3-2i)$

(4) $(2+3i)\div(3-2i)$

Q.12 解答

$$(1) \qquad (2+3i)+(3-2i)=5+i$$

$$(2) \qquad (2+3i)-(3-2i)=-1+5i$$

$$(3) \qquad (2+3i)\times(3-2i)=12+5i$$

$$(4) \qquad (2+3i)\div(3-2i)=i$$

- [MODE][3]
- (1): [( ] 2 [+] 3 [i][ )][+][( ] 3 [-] 2 [i][ )][=]
- (2): [( ] 2 [+] 3 [i][ )][-][( ] 3 [-] 2 [i][ )][=]
- (3): [( ] 2 [+] 3 [i][ )][×][( ] 3 [-] 2 [i][ )][=]
- (4): [( ] 2 [+] 3 [i][ )][÷][( ] 3 [-] 2 [i][ )][=]

Q. 13

以下の複素数の四則演算をせよ

(1) $3.60\angle 56.3^{\circ}+3.60\angle(-33.7^{\circ})$

(2) $3.60\angle 56.3^{\circ}-3.60\angle(-33.7^{\circ})$

(3) $3.60\angle 56.3^{\circ}\times 3.60\angle(-33.7^{\circ})$

(4) $3.60\angle 56.3^{\circ}\div 3.60\angle(-33.7^{\circ})$

Q. 13 解答

$$
\begin{aligned}
&(1) \qquad 3.60\angle 56.3^\circ + 3.60\angle -33.7^\circ \simeq 5.09\angle 11.3^\circ \\
&(2) \qquad 3.60\angle 56.3^\circ - 3.60\angle -33.7^\circ \simeq 5.09\angle 101.3^\circ \\
&(3) \qquad 3.60\angle 56.3^\circ \times 3.60\angle -33.7^\circ = 12.96\angle 22.6^\circ \\
&(4) \qquad 3.60\angle 56.3^\circ \div 3.60\angle -33.7^\circ = 1\angle 90^\circ
\end{aligned}
$$

- (1): 3.6 [∠] 56.3 [+] 3.6 [∠][(-)] 33.7 [=]
- (2): 3.6 [∠] 56.3 [-] 3.6 [∠][(-)] 33.7 [=]
- (3): 3.6 [∠] 56.3 [×] 3.6 [∠][(-)] 33.7 [=]
- (4): 3.6 [∠] 56.3 [÷] 3.6 [∠][(-)] 33.7 [=]
- [2ndF][→**rθ**]で極座標系、[2ndF][→**xy**]で直角座標系

Q. 14 (来週やる複素インピーダンス)

$$\dot{Z} = R + \frac{1}{j\omega C}$$

に対して $R = 10k[\Omega], \omega = 2\pi f[rad/s]$,
$f = 2k[Hz], C = 0.01\mu[F]$ のとき $\dot{Z}$ を求めよ

Q.14 解答

$$
\begin{aligned}
\dot{Z} &= R + \frac{1}{j\omega C} = 10 \times 10^3 + \frac{1}{j \times 2\pi \times 2 \times 10^3 \times 0.01 \times 10^{-6}} \\
&= 10 \times 10^3 + (j\pi \times 0.04 \times 10^3 \times 10^{-6})^{-1} \\
&= 10 \times 10^3 + (j\pi \times 0.04 \times 10^{-3})^{-1} \\
&\simeq 10000 - j7958 \\
&\simeq 12780\angle -38.5^\circ
\end{aligned}
$$

- 10 [Exp] 3 [+][( ][**i**][2ndF][π][×] .04 [Exp][(-)] 3 [ )] [2ndF][x^{-1}][=]
- [2ndF][→**rθ**]で極座標系、[2ndF][→**xy**]で直交座標系

マニュアルp15

挿入モードと上書きモード

編集形式が LINE エディターのとき、次の２種類の入力モードを選ぶことができます。

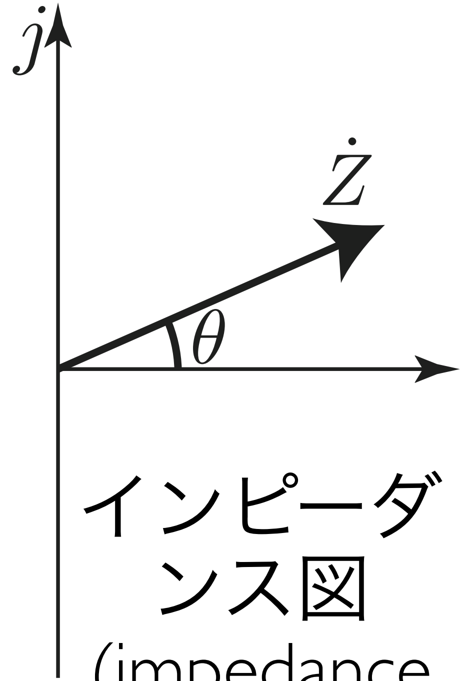
- 挿入モード (INSERT)：
  2ndF SET UP 4 0 と押します。(初期設定)
- 上書きモード (OVERWRITE)：
  2ndF SET UP 4 1 と押します。

● 挿入モードのときは、カーソルの形状が三角形になります。数字などを挿入するには挿入したい場所の直後にカーソルを重ね、入力します。

● 上書きモードのときは、カーソルの形状が四角形になります。カーソル位置の内容が入力した内容に書き換えられます。

正弦波の複素数表示(p90)

- ここまでの複素数表示法
  - 大きさと偏角でインピーダンスの表示は何とかなる
- 正弦波はどう扱うのか？



インピーダンス図
(impedance diagram)

$$
\begin{aligned}
e^{\pm j\theta} &= \cos\theta \pm j\sin\theta \ldots (4.10) \text{ より} \\
e^{\pm j(\omega t+\theta)} &= \cos(\omega t+\theta) \pm j\,\underbrace{\sin(\omega t+\theta)}_{\text{ここだけ使う}}
\end{aligned}
$$

この先は計算を便利にする為の強引な約束事なので注意

瞬時値を複素平面上の回転ベクトルにする(p40)

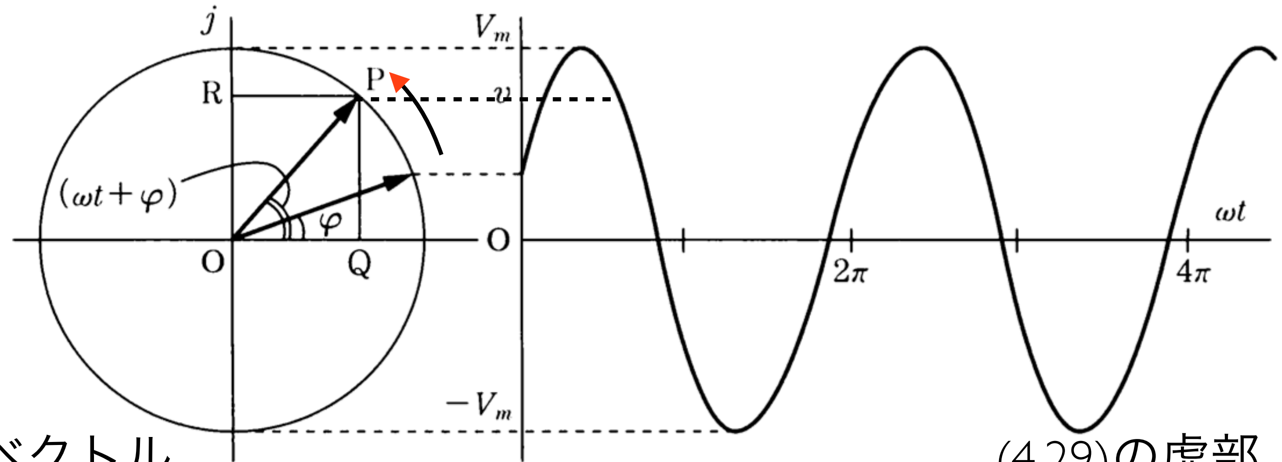
瞬時電圧 $v(t) = V_m \sin(\omega t + \varphi)$ (φ は初期位相) をオイラーの公式の虚数の部分に合わせると

$$\vec{OP} = V_m\{\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)\} \ldots (4.29)$$

となる (実際に必要なのは虚数の部分のみだが、計算を楽にするため実部も存在する)。オイラーの公式より

$$\vec{OP} = V_m e^{j(\omega t + \varphi)} \ldots (4.30)$$

となる。



(4.30)の回転ベクトル　　(4.29)の虚部

図 4.4

rce: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著

$$\vec{OP} = V_m e^{j(\omega t + \varphi)} \ldots (4.30)$$

$\vec{OP}$ が複素平面上の瞬時電圧とすると、位相が θ 進んだ瞬時電流を複素平面上では

$$I_m e^{j(\omega t + \varphi + \theta)} \ldots (4.32)$$

と表わせるが、ωt の項は ω が一定値である限り変化せずムダなので省略する (p91 (i))。

$$V_m e^{j\varphi}, I_m e^{j(\varphi + \theta)}$$

また、最大値 V_m, I_m ではなく実効値 V, I を使う方が便利なので、複素平面上の電圧、電流を複素電圧 $\dot{V}$、複素電流 $\dot{I}$ と呼び、下記のように扱う (p91(ii))。

$$\dot{V} = V e^{j\varphi}, \dot{I} = I e^{j(\varphi + \theta)}$$

p91(iii) では電圧を基準として $\varphi = 0$ となるよう初期位相を設定する問題が多いとしているが、そうとも言い切れない。(電圧、電流のどちらかの初期位相が 0 になっている場合が多い)

電圧・電流の複素数表示の定義のまとめ (p92)

1. 瞬時値をオイラーの公式の虚部にあてはめる
2. 時間因子 $e^{j\omega t}$ を省略
3. 大きさは実効値 V, I を用いる $\left(V = \frac{V_m}{\sqrt{2}}, I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}\right)$

※紛らわしいので p92(iii) は無視する

簡単に言うと実効値を複素数の大きさとして、位相を偏角にするだけで良い。(下式は初期位相 $\varphi = 0$、電流が θ 進みの場合で、$\varphi \neq 0$ の時には $\dot{V}, \dot{I}$ の両方の偏角が φ だけずれる。)

$$
\begin{aligned}
\text{瞬時電圧:}v(t) &= V_m \sin(\omega t) = \sqrt{2}V \sin \omega t \\
\text{複素電圧:}\dot{V} &= V e^{j0^\circ} = V\angle 0^\circ = V \ldots (4.35) \\
\text{瞬時電流:}i(t) &= I_m \sin(\omega t + \theta) = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \theta) \\
\text{複素電流:}\dot{I} &= I e^{j\theta} = I\angle\theta = I(\cos\theta + j\sin\theta) \ldots (4.36)
\end{aligned}
$$

複素電圧 $\dot{V}$ や複素電流 $\dot{I}$ から瞬時電圧 v や瞬時電流 i を求めるには $\sqrt{2}e^{j\omega t}$ を乗じた虚部を求めれば良い。

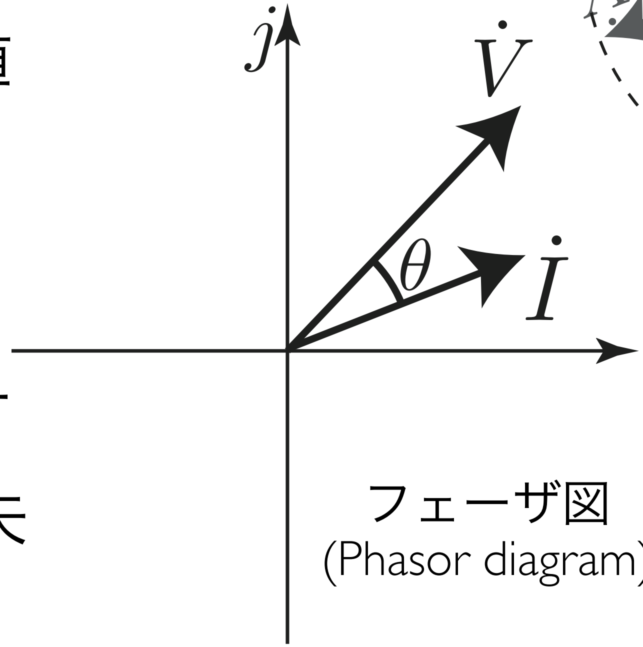
$$
\begin{aligned}
\text{複素電圧:}\dot{V} &= Ve^{j0^\circ} = V\angle 0^\circ = V \ldots (4.35) \\
\text{複素電流:}\dot{I} &= Ie^{j\theta} = I\angle\theta = I(\cos\theta + j\sin\theta) \ldots (4.36)
\end{aligned}
$$

とすると

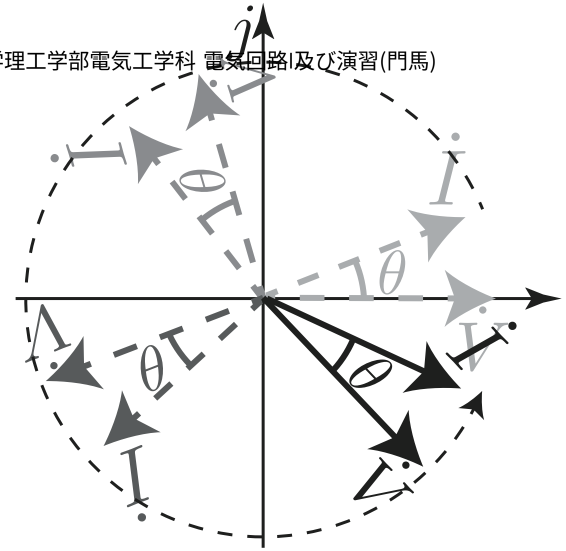
$$
\begin{aligned}
v(t) &= \mathfrak{Im}[\dot{V} \times \sqrt{2}e^{j\omega t}] = \mathfrak{Im}[\sqrt{2}Ve^{j\omega t}] \\
&= \mathfrak{Im}[\sqrt{2}V(\cos\omega t + j\sin\omega t)] \\
&= \sqrt{2}V\sin\omega t = V_m\sin\omega t \\
i(t) &= \mathfrak{Im}[\dot{I} \times \sqrt{2}e^{j\omega t}] = \mathfrak{Im}[\sqrt{2}Ie^{j\theta}e^{j\omega t}] = \mathfrak{Im}[\sqrt{2}Ie^{j(\omega t+\theta)}] \\
&= \mathfrak{Im}[\sqrt{2}I\{(\cos(\omega t+\theta) + j\sin(\omega t+\theta)\}] \\
&= \sqrt{2}I\sin(\omega t+\theta) = I_m\sin(\omega t+\theta)
\end{aligned}
$$

フェーザ(Phasor)図 (マグロウヒルp.57)

- 電圧電流の位相の関係や実効値を視覚的の表現した図
- ωtが変化してもθは維持したまま複素電圧と複素電流が回転する(フェーザ) (右図の回転する矢印を書く必要は無い)
- 交流正弦波の複素数による表示をフェーザ表示と呼ぶ(直角座標、指数関数、極座標形式のどれでも良い)



フェーザ図
(Phasor diagram)



フェーザの回転

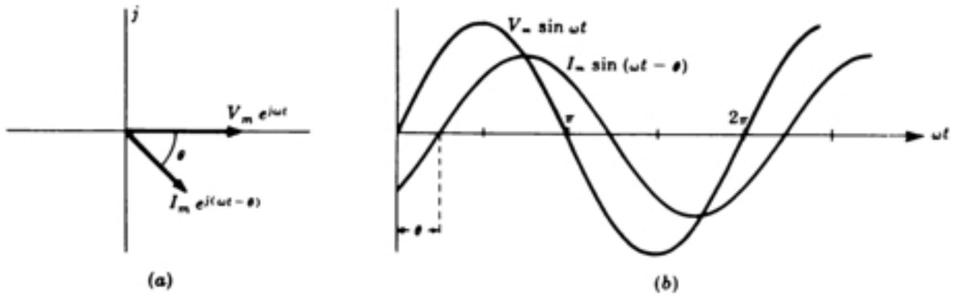


図5－9

Source: マグロウヒル大学講義 電気回路, J.A. Edminister

瞬時値と実効値と複素数の関係のまとめ

瞬時値: $\boxed{最大値}\sin(\omega t + \boxed{位相})$

実効値: $\dfrac{\boxed{最大値}}{\sqrt{2}}$

$$
\begin{aligned}
v(t) &= V_m \sin(\omega t + \theta_1) \\
i(t) &= I_m \sin(\omega t + \theta_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{V_m}{\sqrt{2}} \\
I &= \frac{I_m}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

複素数: $\boxed{実効値} \angle \boxed{位相}$ または $\boxed{実効値}\, e^{j\boxed{位相}}$

または $\boxed{実効値}\,(\cos \boxed{位相} + j \sin \boxed{位相})$

$$
\begin{aligned}
\dot{V} &= V\angle\theta_1 = \frac{V_m}{\sqrt{2}}\angle\theta_1 \\
&= Ve^{j\theta_1} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}e^{j\theta_1} \\
&= V(\cos\theta_1 + j\sin\theta_1) \\
&= \frac{V_m}{\sqrt{2}}(\cos\theta_1 + j\sin\theta_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{I} &= I\angle\theta_2 = \frac{I_m}{\sqrt{2}}\angle\theta_2 \\
&= Ie^{j\theta_2} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}e^{j\theta_2} \\
&= I(\cos\theta_2 + j\sin\theta_2) \\
&= \frac{I_m}{\sqrt{2}}(\cos\theta_2 + j\sin\theta_2)
\end{aligned}
$$

例題4.2(p.92)

(a) 瞬時電圧 $v(t) = 100\sqrt{2}\sin(100\pi t)[V]$ を複素電圧 $\dot{V}$

で表わせ

(b) 瞬時電流 $i(t) = 5\sqrt{2}\sin(200\pi t + \frac{\pi}{3})[A]$ を複素電流 $\dot{I}$

で表わせ

※直角座標形式、指数関数形式、極座標形式で示すこと

例題4.2(p.92)の出題意図

(a) 瞬時電圧 $v(t) = 100\sqrt{2}\sin(100\pi t)[V]$ を複素電圧 $\dot{V}$

で表わせ　　最大値→実効値

(b) 瞬時電流 $i(t) = 5\sqrt{2}\sin(200\pi t + \frac{\pi}{3})[A]$ を複素電流 $\dot{I}$

で表わせ　　位相

※直角座標形式、指数関数形式、極座標形式で示すこと

例題4.2解答例

(a) $V_m = 100\sqrt{2}$ より実効値 $V = \frac{100\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 100[V]$。位相は 0° より

$$\dot{V} = 100e^{j0^\circ}[V] = 100\angle 0^\circ[V] = 100[V]$$

(b) $I_m = 5\sqrt{2}$ より実効値 $I = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 5[A]$。位相は $\frac{\pi}{3}[rad]$ より

$$\dot{I} = 5e^{j\frac{\pi}{3}}[A] = 5\angle\frac{\pi}{3}[A] = 5(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}) \simeq 2.50 + j4.33[A]$$