電気回路I及び演習

6. 複素インピーダンスとRL, RC, RLC直列回路

学習目標

- 基本素子の複素インピーダンスの考え方を理解する
- 複素インピーダンスにおける位相と虚数単位jの関係を理解する
- RLC, RL, RC直列回路について複素インピーダンス、複素電圧、複素電流の関係を、フェーザ図を基に理解する

4.3 回路素子の複素数表示 (P.92)

R, L, Cへの複素数の導入

基本素子・リアクタンス・インピーダンスのまとめ

想像上のもの

これらは合理的な計算をするために考えられた想像上のもの

実在するもの

・抵抗R

・コイルL(後で出るM)
(自己(相互)インダクタンス)

・コンデンサC
(静電容量)

・Rのみオームの法則で使える

・これらは角周波数が変化しても値が変わらない

インピーダンス$\dot{Z}$ [Ω]

$$|\dot{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L + \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{X}{R}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

・オームの法則で使える

・実在する抵抗Rと想像上のリアクタンスXを混ぜる方法

・Rが水平成分でXが垂直成分のベクトル
(Rは(R,0), Xは(0,X)のベクトルと考えて計算をする)

・角周波数でXの値が変わる

・電流, 電圧間に位相差
RとXの割合で位相差が決まる
正: 電流に対して電圧が進む
負: 電流に対して電圧が遅れる

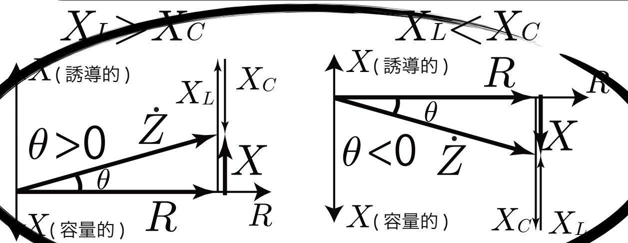
リアクタンスX[Ω]

$$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

・オームの法則で使える

・電流, 電圧間に位相差
$X_L > X_C$: 誘導的
電圧が電流より$\pi/2$進む
電流が電圧より$\pi/2$遅れる
$X_L < X_C$: 容量的
電圧が電流より$\pi/2$遅れる
電流が電圧より$\pi/2$進む

・角周波数で値が変わる



やってはいけない

$$R+L+C, R+L, R+C, L+C, R+X_L, R+X_C, R+X, \dot{Z}+R \;\cdots$$

※抵抗は抵抗同士, リアクタンスはリアクタンス同士, インピーダンスはインピーダンス同士で計算すること

ベクトル演算子(p.87)

複素数にjを掛けると偏角θがπ/2進む

複素数に-jを掛ける(jで割る)と偏角θがπ/2遅れる

jの乗除算は大きさはそのままな偏角の回転(進み・遅れ)を意味する

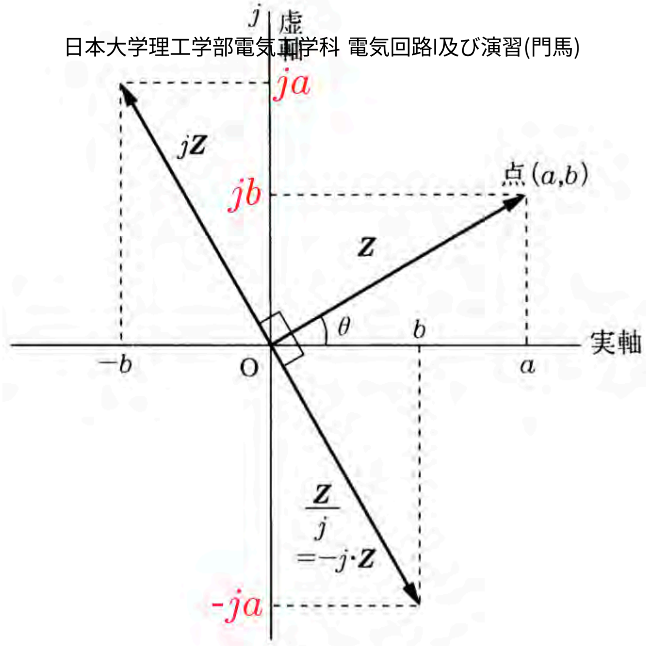


図 4.3

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著

$$\frac{1}{j} = \frac{j}{jj} = \frac{j}{-1} = -j \ldots (4.26)$$

$$j \times j = -1$$
$$j \times j \times j = -j$$
$$j \times j \times j \times j = 1$$
$$j \times j \times j \times j \times j = j$$
$$j \times j \times j \times j \times j \times j = -1$$
$$j \times j \times j \times j \times j \times j \times j = -j$$
$$j \times j \times j \times j \times j \times j \times j \times j = 1$$
$$j \times j \times j \times j \times j \times j \times j \times j \times j = j$$
$$j \times j \times j \times j \times j \times j \times j \times j \times j \times j = -1$$
$$\vdots$$

$$j \div j = 1$$
$$j \div j \div j = -j$$
$$j \div j \div j \div j = -1$$
$$j \div j \div j \div j \div j = j$$
$$j \div j \div j \div j \div j \div j = 1$$
$$j \div j \div j \div j \div j \div j \div j = -j$$
$$j \div j \div j \div j \div j \div j \div j \div j = -1$$
$$j \div j \div j \div j \div j \div j \div j \div j \div j = j$$
$$j \div j \div j \div j \div j \div j \div j \div j \div j \div j = 1$$
$$\vdots$$

"位相"の概念をjにする

- V=I|Z|やV=IXには位相が出てこない
  - 位相は位相でtan^{-1}を計算するか、誘導性・容量性を判断する必要があった
- 位相とjの対応関係
  - 電流を基準とすると誘導性・容量性リアクタンスは電圧に90°, -90°の進み・遅れをもたらす
  - j(直角座標形式)の乗除算は複素数に90°, -90°の回転(進み・遅れ)をもたらす
- **リアクタンスに j を付ければ位相も含めた計算が可能に？**

虚数単位と位相の関係

指数関数形式で位相 θ が $90^\circ, 0, -90^\circ$ であるとき、直角座標形式ではオイラーの公式 (p.85 式 (4.10)、$e^{\pm\theta} = \cos\theta \pm j\sin\theta$) より

$$
\begin{aligned}
e^{j90^\circ} &= \cos 90^\circ + j\sin 90^\circ = 0 + j = j \ldots (4.38) \\
e^{j0^\circ} &= \cos 0^\circ + j\sin 0^\circ = 1 + j0 = 1 \\
e^{-j90^\circ} &= \cos 90^\circ - j\sin 90^\circ = 0 - j = -j = \frac{1}{j} \ldots (4.41)
\end{aligned}
$$

j を掛ける: 位相を 90° 進めることを意味する

1 を掛ける **(**何もしない**):** 位相が変わらないことを意味する (偏角:0°)

j で割る **(** $-j$ を掛ける**):** 位相を 90° 遅らせることを意味する

位相とリアクタンスの関係

左辺が 90° 進むケース

$$V = IX_L = \omega LI$$

$$I = \frac{V}{X_C} = \omega CV$$

位相を含む複素電圧・複素電流で考えると
j の乗算で 90° 進むので

$$\dot{V} = j\omega L\dot{I} \ldots (4.42)$$

$$\dot{I} = j\omega C\dot{V} \ldots (4.39)$$

左辺が 90° 遅れるケース

$$I = \frac{V}{X_L} = \frac{V}{\omega L}$$

$$V = IX_C = I\frac{1}{\omega C} = \frac{I}{\omega C}$$

j の除算で 90° 遅れるので

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{j\omega L} \ldots (4.42)$$

$$\dot{V} = \frac{\dot{I}}{j\omega C} \ldots (4.39)$$

※抵抗 R については位相に影響を与えないので $\dot{V} = \dot{I}R \ldots (4.37)$

教科書に沿った説明(p93)

4.3.1 抵抗Rの複素数表示(p93)

電圧と電流の位相差 $\theta = 0$ なので位相の影響は考えずに大きさのみ考えれば良いので、

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{R} \text{または} \dot{V} = R\dot{I} \ldots (4.37)$$

となる。

4.3.2 静電容量Cの複素数表示(p. 93)

複素電圧を $\dot{V} = Ve^{j\omega t}$ とすれば、複素電流は位相が $\frac{\pi}{2}$ 進むので $\dot{I} = Ie^{j(\omega t+\frac{\pi}{2})}$ となり、p.54 式 (3.14-15) と対応させると

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{1}{C}\int idt \\
\dot{V} &= \frac{1}{C}\int \dot{I}dt \\
&= \frac{I}{C}\int e^{j(\omega t+\frac{\pi}{2})}dt \\
&= \frac{Ie^{j(\omega t+\frac{\pi}{2})}}{j\omega C} \\
&= \frac{1}{j\omega C}\dot{I}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i &= C\frac{dv}{dt} \\
\dot{I} &= C\frac{d\dot{V}}{dt} \\
&= CV\frac{de^{j\omega t}}{dt} \\
&= j\omega CVe^{j\omega t} \\
&= j\omega C\dot{V}
\end{aligned}
$$

※微積分と$j\omega$の関係に注目

4.3.3 自己インダクタンスLの複素数表示(p94)

複素電圧を $\dot{V} = Ve^{j\omega t}$ とすれば、複素電流は $\dot{I} = Ie^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})}$ となり、p.58 式 (3.25-26) と対応させると

$$
\begin{aligned}
v &= L\frac{di}{dt} \\
\dot{V} &= L\frac{d\dot{I}}{dt} \\
&= LI\frac{de^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})}}{dt} \\
&= j\omega LIe^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} \\
&= j\omega L\dot{I}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i &= \frac{1}{L}\int v dt \\
\dot{I} &= \frac{1}{L}\int \dot{V} dt = \frac{V}{L}\int e^{j\omega t} dt \\
&= \frac{Ve^{j\omega t}}{j\omega L} \\
&= \frac{1}{j\omega L}\dot{V}
\end{aligned}
$$

※微積分と$j\omega$の関係に注目

R、C、Lの複素数表示のまとめ

$\omega \Longrightarrow j\omega$ として計算するだけでよい。

抵抗 R の複素数表示 **(p.93):** $\Longleftrightarrow (3.9)(p.52)$

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{R} \text{または} \dot{V} = R\dot{I} \ldots (4.37)$$

静電容量 C の複素数表示 **(p.93):** $\Longleftrightarrow (3.18)(p.56)$

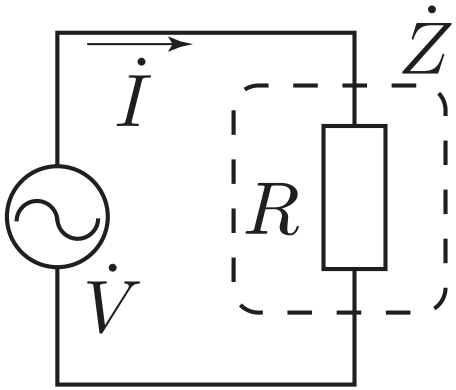
$$\dot{I} = j\omega C\dot{V} \text{または} \dot{V} = \frac{1}{j\omega C}\dot{I} \ldots (4.39)$$

自己インダクタンス L の複素数表示 **(p.94):** $\Longleftrightarrow (3.29)(p.60)$

$$\dot{I} = \frac{1}{j\omega L}\dot{V} \text{または} \dot{V} = j\omega L\dot{I} \ldots (4.42)$$

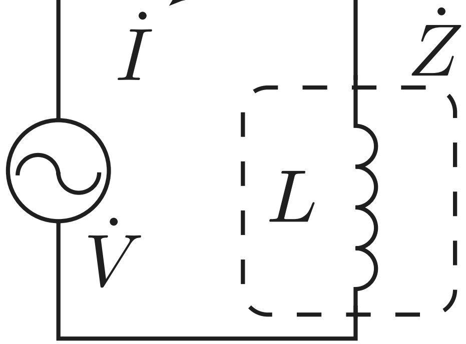
※複素電流、複素電圧にとって時間積分は $\frac{1}{j\omega}$ 倍、時間微分は $j\omega$ 倍

単一の素子での複素インピーダンス



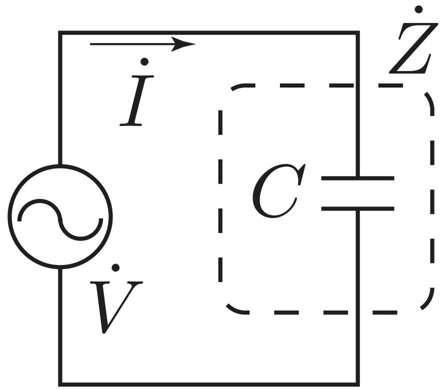
$$\dot{Z} = R[\Omega]$$

(虚部が0)



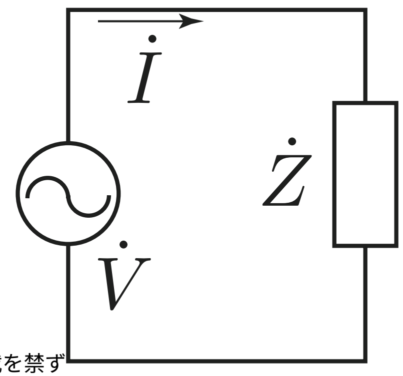
$$\dot{Z} = j\omega L[\Omega]$$

(実部が0)



$$\dot{Z} = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}[\Omega]$$

(実部が0)



以降は全て $\dot{Z}$ として考える

これ以降、複素電圧や複素電流での「複素」は
省略されている場合が多いので注意。
※ベクトル記述(太字やドット)の有無で判別する
※瞬時値と紛らわしい場合には明記される

4.4 交流回路における基本的な法則(p.94)

直流回路での基本的な法則は R を $\dot{Z}$ に置き換えて計算が可能。

- 抵抗の直列接続の法則
- 分圧の法則
- キルヒホッフの法則
- などなど

※並列については後日

アドミタンス

コンダクタンス (p. 4 式 (1.3): $I = \frac{V}{R} = GV, G = \frac{1}{R}[S]$) と同じ考え方で、インピーダンス $\dot{Z}$ の逆数。

$$\text{アドミタンス}\dot{Y} = \frac{1}{\dot{Z}}[S]$$

従って、

$$\dot{I} = \dot{V}\dot{Y}\text{または}\dot{V} = \frac{\dot{I}}{\dot{Y}}$$

詳細は後日、並列回路で扱う。

4.4.1 複素インピーダンス・複素アドミタンスの直列接続(p.95)

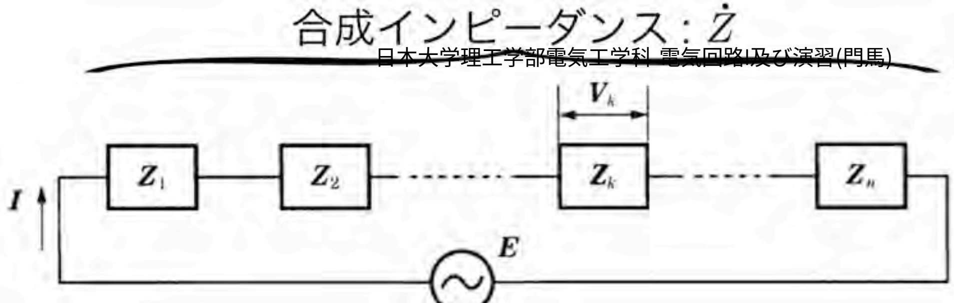


図 4.5

n 個のインピーダンス $\dot{Z}_1, \dot{Z}_2, \cdots, \dot{Z}_n$ が直列に接続されている場合、合成インピーダンス $\dot{Z}$ は

$$\dot{Z} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \cdots + \dot{Z}_n = \sum_{k=1}^{n} \dot{Z}_k \ldots (4.44)$$

n 個のアドミタンス $\dot{Y}_1 = \frac{1}{\dot{Z}_1}, \dot{Y}_2 = \frac{1}{\dot{Z}_2}, \cdots, \dot{Y}_n = \frac{1}{\dot{Z}_n}$ が直列に接続されている場合、合成アドミタンス $\dot{Y}$ は

$$\frac{1}{\dot{Y}} = \frac{1}{\dot{Y}_1} + \frac{1}{\dot{Y}_2} + \cdots + \frac{1}{\dot{Y}_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\dot{Y}_n} \ldots (4.45)$$

となる。

4.4.1 複素インピーダンス・複素アドミタンスの直列接続(p.95)

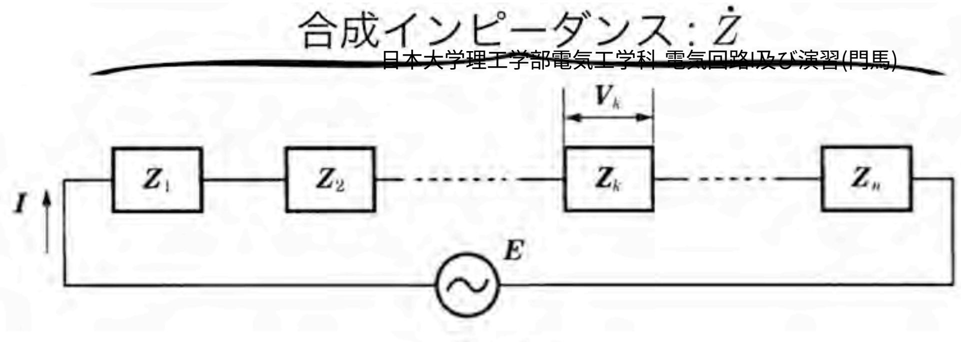


図 4.5

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光

n 個のインピーダンス $\dot{Z}_1, \dot{Z}_2, \cdots, \dot{Z}_n$ が直列に接続されている場合、合成インピーダンス $\dot{Z}$ は

※直列の場合はインピーダンスで合成する

$$\dot{Z} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \cdots + \dot{Z}_n = \sum_{k=1}^{n} \dot{Z}_k \ldots (4.44)$$

n 個のアドミタンス $\dot{Y}_1 = \frac{1}{\dot{Z}_1}, \dot{Y}_2 = \frac{1}{\dot{Z}_2}, \cdots, \dot{Y}_n = \frac{1}{\dot{Z}_n}$ が直列に接続されている場合、合成アドミタンス $\dot{Y}$ は

$$\frac{1}{\dot{Y}} = \frac{1}{\dot{Y}_1} + \frac{1}{\dot{Y}_2} + \cdots + \frac{1}{\dot{Y}_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\dot{Y}_n} \ldots (4.45)$$

となる。

4.4.2交流回路における分圧の法則(p.96)

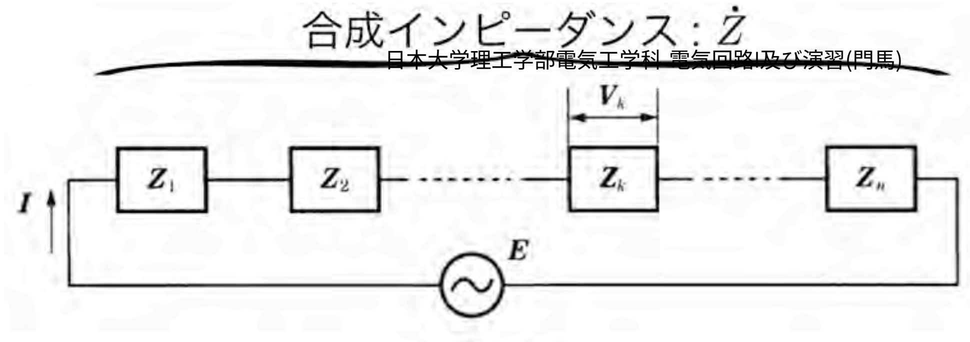


図 4.5

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著

合成インピーダンスが $\dot{Z}$ の、n 個のインピーダンス $\dot{Z}_1, \dot{Z}_2, \cdots, \dot{Z}_n$ が直列に接続され、全体に起電力 $\dot{E}$ が加えられた時、電流 $\dot{I}$ は

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}} = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \cdots + \dot{Z}_n} \ldots (4.48)$$

となる。ここで k 番目のインピーダンス $\dot{Z}_k$ にかかる電圧を $\dot{V}_k$ とすると分圧の法則より

$$\dot{V}_k = \dot{Z}_k \dot{I} = \frac{\dot{Z}_k}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \cdots + \dot{Z}_n} \dot{E} \ldots (4.49)$$

4.4.3 交流回路における キルヒホッフの法則(p.98)

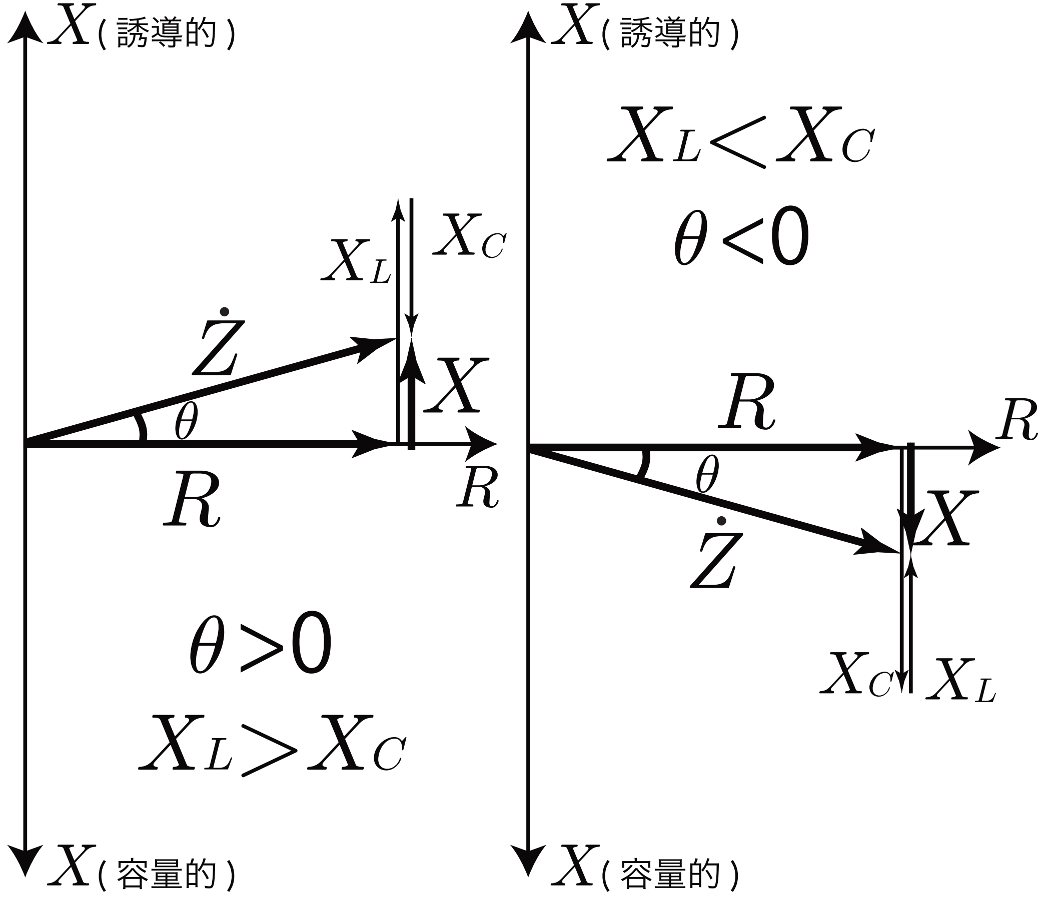
(a) キルヒホッフの第一法則 (電流連続の法則)
回路網中の任意の接続点に流れ込む電流 $\dot{I}_k(k = 1, 2, \cdots, n)$ の総和は零である。

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{I}_k = 0 \ldots (4.52)$$

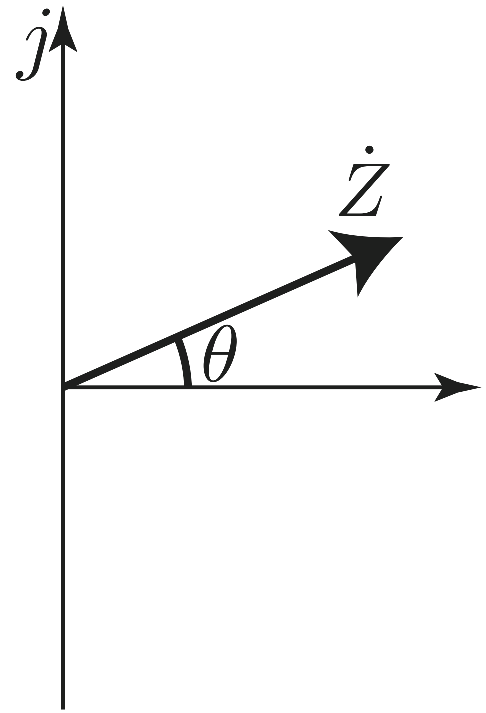
(b) キルヒホッフの第二法則 (電圧平衡の法則)
回路網中の任意の閉路において、一方向を正とすると、すべての起電力 $\dot{E}_k(k = 1, 2, \cdots, n)$ および電圧降下 $\dot{V}_l(l = 1, 2, \cdots, m)$ の代数和は零である。

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{E}_k - \sum_{l=1}^{m} \dot{V}_l = 0 \ldots (4.53)$$

4.5 複素数表示による基本回路の計算(p.98)



インピーダンス図



インピーダンスを複素平面のインピーダンス図に適用したい

RLC直列回路(p105)

※教科書とは説明の順番が異なるので注意

なぜRLC直列回路が先なのか

- RC直列回路、RL直列回路、LC直列回路(後日)は特殊な例
  - RLC直列回路のいずれかの素子の抵抗またはリアクタンスが0になった場合
- RLC直列回路が理解できれば後は同じ話

やること

極座標系 $\dot{Z} = |\dot{Z}|\angle\theta \ldots (4.12)$

$$\begin{aligned} \text{動径, 大きさ } |\dot{Z}| &= \sqrt{a^2+b^2} \ldots (4.3) \\ \text{偏角}\theta &= \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \end{aligned}$$

直交座標系 $a + jb$

$$\begin{aligned} a &= |\dot{Z}|\cos\theta \ldots (4.2) \\ b &= |\dot{Z}|\sin\theta \\ \dot{Z} &= a + jb \ldots (4.1) \\ &= |\dot{Z}|(\cos\theta + j\sin\theta) \ldots (4.4) \\ &= |\dot{Z}|e^{j\theta} \ldots (4.11) \end{aligned}$$

オイラーの公式: $e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j\sin\theta \ldots (4.10)$

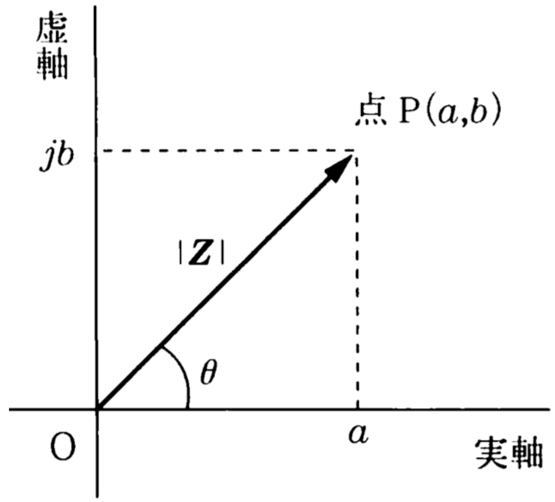
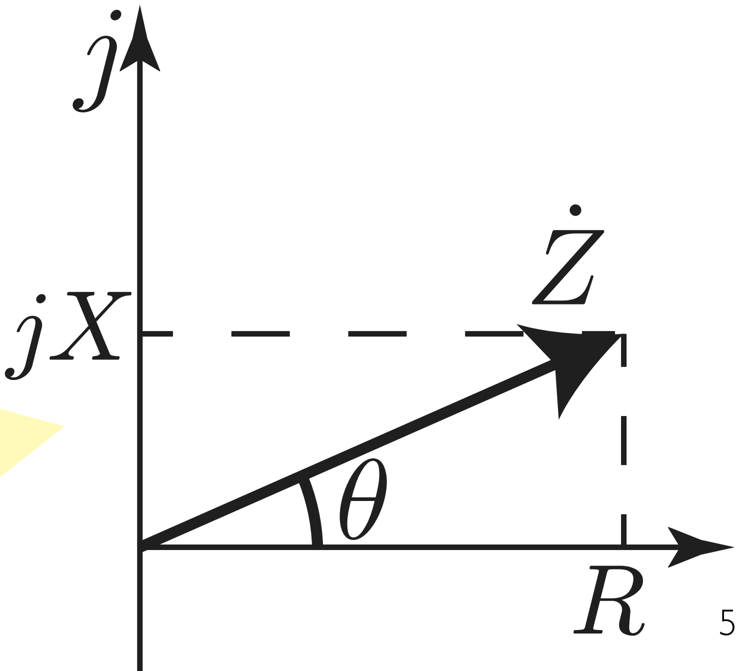


図 4.1

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著



$$\dot{Z} = R + jX = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$= |\dot{Z}|(\cos\theta + j\sin\theta)$$

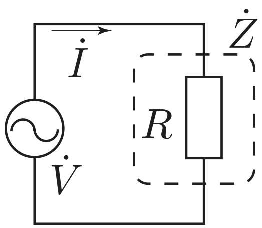
$$|\dot{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{X}{R} = \tan^{-1}\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

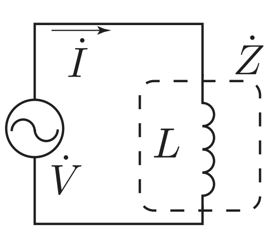
$$R = |\dot{Z}|\cos\theta$$

$$X = |\dot{Z}|\sin\theta$$

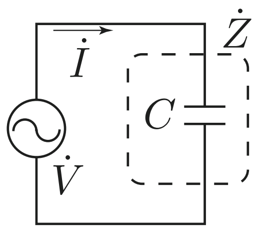
単一の素子での複素インピーダンス



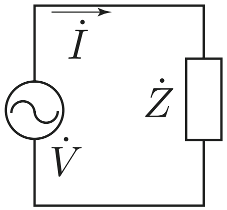
$\dot{Z} = R[\Omega]$
(虚部が0)



$\dot{Z} = j\omega L[\Omega]$
(実部が0)



$\dot{Z} = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}[\Omega]$
(実部が0)



以降は全て $\dot{Z}$ として考える

4.4.1 複素インピーダンス・複素アドミタンスの直列接続(p.95)

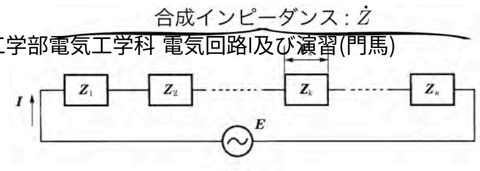


図 4.5

n 個のインピーダンス $\dot{Z}_1, \dot{Z}_2, \cdots, \dot{Z}_n$ が直列に接続されている場合、合成インピーダンス $\dot{Z}$ は

※直列の場合はインピーダンスで合成する

$$\dot{Z} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \cdots + \dot{Z}_n = \sum_{k=1}^{n} \dot{Z}_k \ldots (4.44)$$

n 個のアドミタンス $\dot{Y}_1 = \frac{1}{\dot{Z}_1}, \dot{Y}_2 = \frac{1}{\dot{Z}_2}, \cdots, \dot{Y}_n = \frac{1}{\dot{Z}_n}$ が直列に接続されている場合、合成アドミタンス $\dot{Y}$ は

$$\frac{1}{\dot{Y}} = \frac{1}{\dot{Y}_1} + \frac{1}{\dot{Y}_2} + \cdots + \frac{1}{\dot{Y}_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\dot{Y}_n} \ldots (4.45)$$

となる。

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦

RLC 直列回路での合成インピーダンス

直列の場合は各素子を複素インピーダンスに置き換えて足すだけで良い。合成インピーダンスを $\dot{Z}$ とすれば、

$$\dot{Z} = \overbrace{R}^{\text{R のぶん}} + \overbrace{j\omega L}^{L\text{ のリアクタンスのぶん}} + \overbrace{\frac{1}{j\omega C}}^{C\text{ のリアクタンスのぶん}}$$

$$= R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)[\Omega]$$

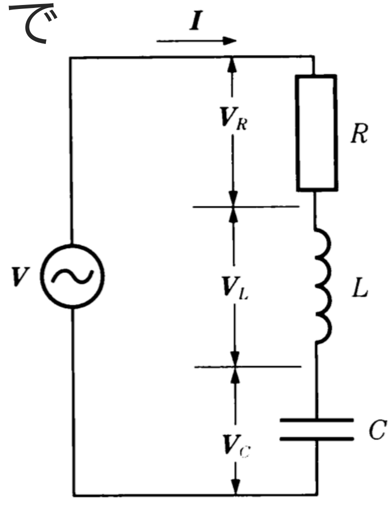


図 4.17

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著

RLC直列回路のインピーダンス図

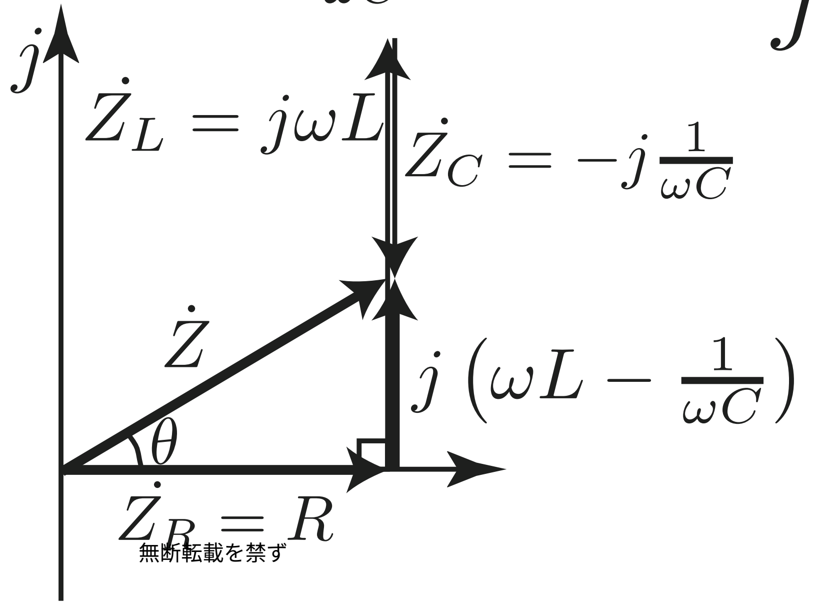
$$\dot{Z} = \dot{Z}_R + \dot{Z}_L + \dot{Z}_C = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \ldots (4.76)$$

$$= |\dot{Z}|e^{j\theta} = |\dot{Z}|\angle\theta \ldots$$

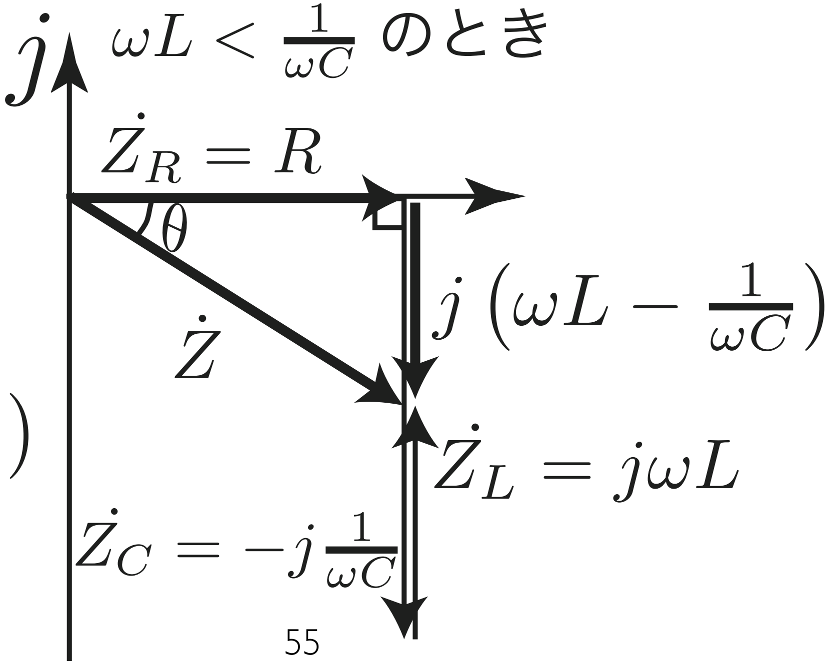
大きさ $|\dot{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$

偏角$\theta = \tan^{-1}\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \ldots (4.77)$

$\omega L > \frac{1}{\omega C}$ のとき



$\omega L < \frac{1}{\omega C}$ のとき



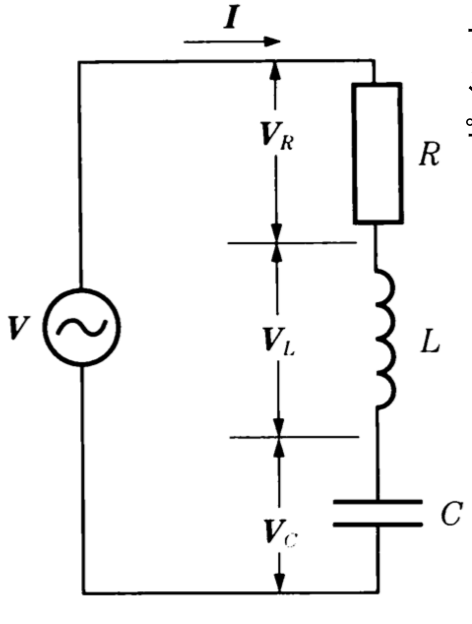


図 4.17

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著

RLC直列回路の各素子の電圧降下から考えた場合 (p106)

R, L, C 各素子の電圧降下を $\dot{V}_R, \dot{V}_L, \dot{V}_C$ とし、全体にかかる電圧を $\dot{V}$ とすると

$$\dot{V}_R = R\dot{I}, \dot{V}_L = j\omega L\dot{I}, \dot{V}_C = \frac{\dot{I}}{j\omega C} = -j\frac{\dot{I}}{\omega C}$$

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{V}_R + \dot{V}_L + \dot{V}_C \\ &= R\dot{I} + j\omega L\dot{I} - j\frac{1}{\omega C}\dot{I} \\ &= \left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]\dot{I} \ldots (4.75)\end{aligned}$$

$$\dot{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \ldots (4.76)$$ とすると

$$\dot{V} = \dot{Z}\dot{I}$$

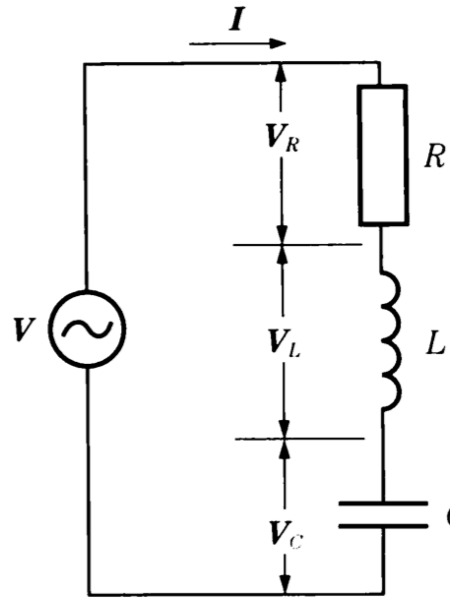


図 4.17

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著

RLC直列回路の複素インピーダンスのまとめ

想像上のもの

これらは合理的な計算をするために考えられた想像上のもの

複素インピーダンス$\dot{Z}$ [Ω]

$$\dot{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX$$

$$|\dot{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L + \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{X}{R}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

・オームの法則で使える

・実在する抵抗Rと想像上のリアクタンスXを混ぜる方法

・複素空間でインピーダンスを扱い
Rを実部、リアクタンスXを虚部として
計算をする(実際には$\omega \to j\omega$で計算)

・角周波数でXの値が変わる

・電流, 電圧間に位相差
R+jXの偏角で位相差が決まる
正: 電流に対して電圧が進む
負: 電流に対して電圧が遅れる

実在するもの

・抵抗R

・コイルL(後で出るM)
(自己(相互)インダクタンス)

・コンデンサC
(静電容量)

・Rのみオームの法則で使える

・これらは角周波数が変化しても値が変わらない

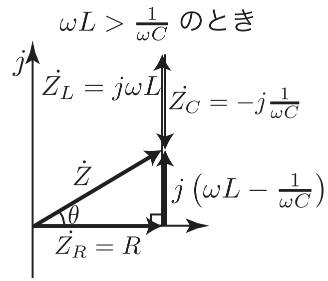
リアクタンスX[Ω]

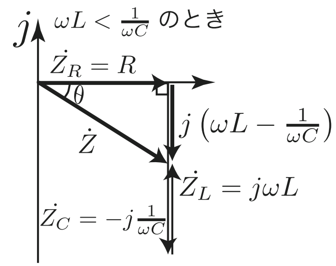
$$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

・オームの法則で使える

・電流, 電圧間に位相差
$X_L > X_C$: 誘導的
電圧が電流より$\pi/2$進む
電流が電圧より$\pi/2$遅れる
$X_L < X_C$: 容量的
電圧が電流より$\pi/2$遅れる
電流が電圧より$\pi/2$進む

・角周波数で値が変わる





※抵抗等の基本素子、リアクタンスは複素インピーダンスにしてから複素インピーダンス同士で計算すること

マグロウヒル 6.8 (p76)

図 6-23 に示す直列回路において、電流の実効値が 5A であるという。電圧計をこの回路の両端子に繋げば、その読みは、いくらか。また、それぞれの回路素子につなげば、いくらを示すか。

電圧計=電子電圧計と解釈して
大きさだけが答えになる

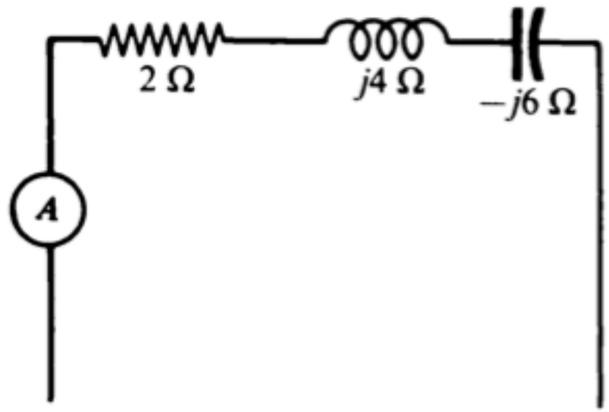


図 6 - 23

Source: マグロウヒル大学演習 電気回路, J. A. Edminister

マグロウヒル 6.8の出題意図

図 6-23 に示す直列回路において、電流の実効値が 5A で

複素インピーダンスを求める

あるという。電圧計をこの回路の両端子に繋げば、その

オームの法則で複素電圧を求める

読みは、いくらか。また、それぞれの回路素子につなげ

各素子の電圧をオームの法則で求める

ば、いくらを示すか。

電圧計=電子電圧計と解釈して

大きさだけが答えになる

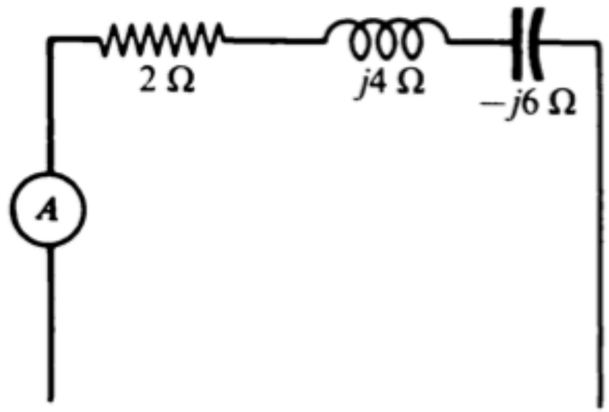


図 6 - 23

Source: マグロウヒル大学演習 電気回路, J. A. Edminister

6.8　図 6 - 23に示す直列回路において，電流の実効値が 5 A であるという．電圧計をこの回路の両端子につなげば，その読みは，いくらか．また，それぞれの回路素子の両端につなげば，いくらを示すか．

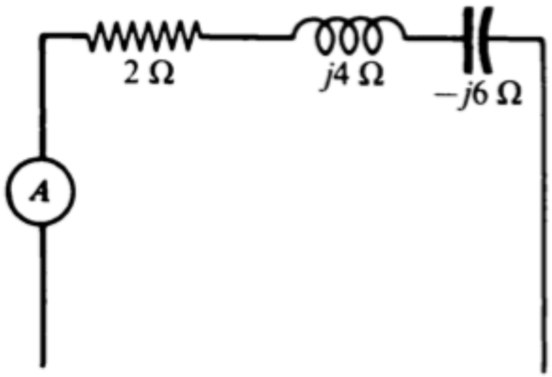


図 6 - 23

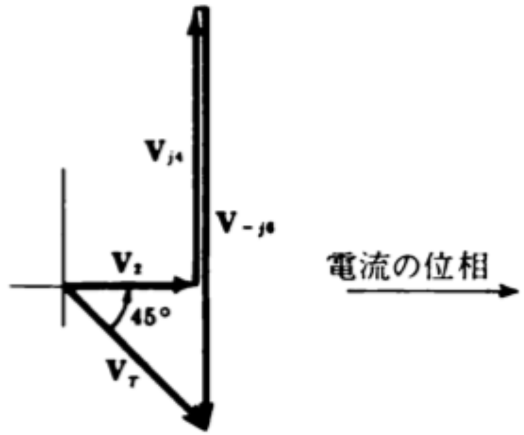


図 6 - 24

〔解〕　等価インピーダンスは，$\mathbf{Z}_{eq}=2+j4-j6=2.83\underline{/-45^\circ}\,\Omega$になる．したがって，電圧計の読みはそれぞれ $V_T=5(2.83)=14.14$V，$V_2=5(2)=10$V，$V_{j4}=5(4)=20$V，および $V_{-j6}=5(6)=30$V になる．図 6 - 24に示すフェーサ図は，各回路素子の電圧の合成を示している．

題意では大きさのみ示せば良いが $\dot{I}=5\angle 0^\circ$ として各々の位相を含めた複素電圧を求めると、$\dot{Z}_R=2\angle 0^\circ$, $4\angle 90^\circ, \dot{Z}_C=-j6=6\angle(-90^\circ)$ より

$$\dot{Z}=\dot{Z}_R+\dot{Z}_L+\dot{Z}_C=2+j4-j6\simeq 2.83\angle(-45^\circ)[\Omega]$$

$$\dot{V}=\dot{I}\dot{Z}=5\angle 0^\circ\times 2.83\angle(-45^\circ)\simeq 14.14\angle(-45^\circ)[V]$$

$$\dot{V}_R=\dot{I}\dot{Z}_R=5\angle 0^\circ\times 2\angle 0=10\angle 0^\circ[V]$$

$$\dot{V}_L=\dot{I}\dot{Z}_L=5\angle 0^\circ\times 4\angle 90^\circ=20\angle 90^\circ[V]$$

$$\dot{V}_C=\dot{I}\dot{Z}_C=5\angle 0^\circ\times 6\angle(-90^\circ)=30\angle(-90^\circ)[V]$$

4.5.1 RLの直列回路(p.98)

インピーダンス $\dot{Z}$ については $\dot{Z}_1 = R$ と $\dot{Z}_2 = j\omega L$ の足し算と考えれば良い。全体のインピーダンス $\dot{Z} = R + j\omega L$ となる。

抵抗 R と自己インダクタンス L の電圧降下をそれぞれ $\dot{V}_R, \dot{V}_L$ とすると

$$\dot{V}_R = R\dot{I}[V]$$

$$\dot{V}_L = j\omega L\dot{I}[V]$$

$(\dot{V} - (\dot{V}_R + \dot{V}_L) = 0$:キルヒホッフの第二法則より$)$

$$\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_L$$

$$\dot{V} = (R + j\omega L)\dot{I} = \dot{Z}\dot{I} \ldots (4.55), (4.57)$$

$$\dot{Z} = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = R + j\omega L[\Omega] \ldots (4.56)$$

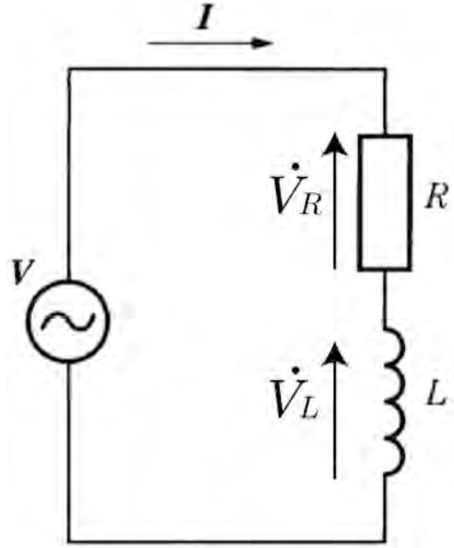


図 4.7

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著

4.5.1 RLの直列回路(p.98)

また $\dot{Z}$ は大きさを $|\dot{Z}|$、偏角を θ とすると

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= |\dot{Z}|e^{j\theta} = |\dot{Z}|\angle\theta \ldots (4.58) \\ |\dot{Z}| &= \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \\ \theta &= \tan^{-1}\frac{\omega L}{R} \end{aligned}$$

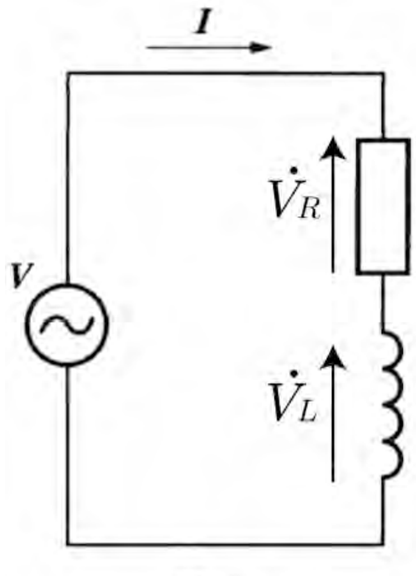


図 4.7

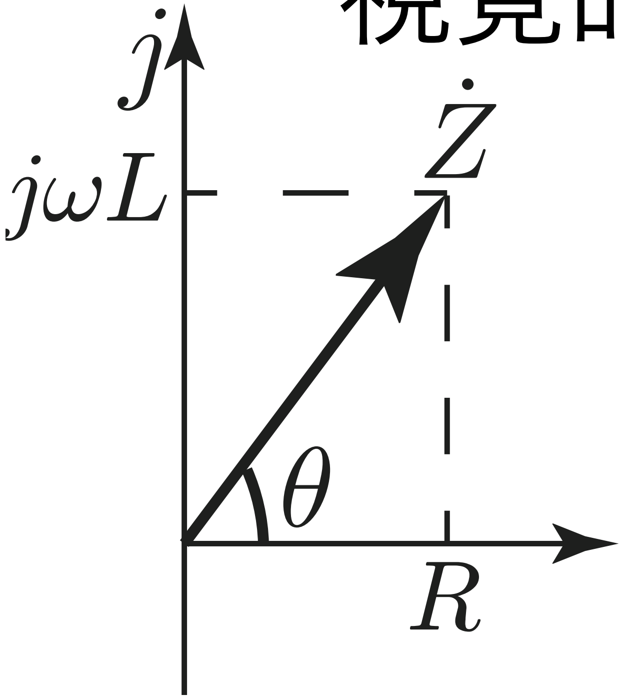
Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著

で求まる。従って $\dot{V} = \dot{Z}\dot{I}$(式 (4.57)) に代入すると

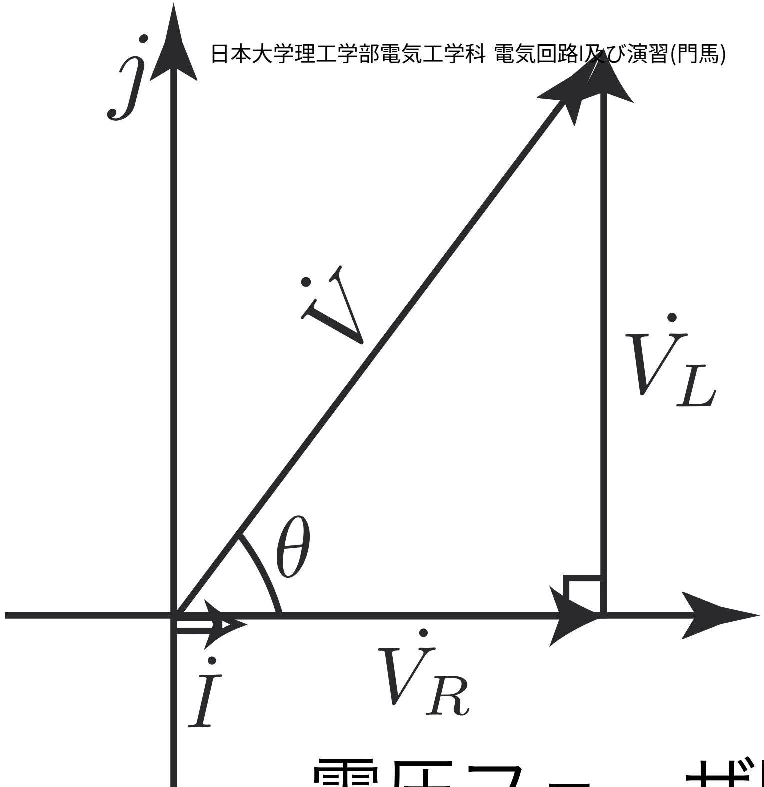
$$\dot{V} = |\dot{Z}|\angle\theta \times \dot{I}$$

となり、 $\dot{V}$ は $\dot{I}$ を「 $|\dot{Z}|$ 倍して位相を θ 進めた」値になる。

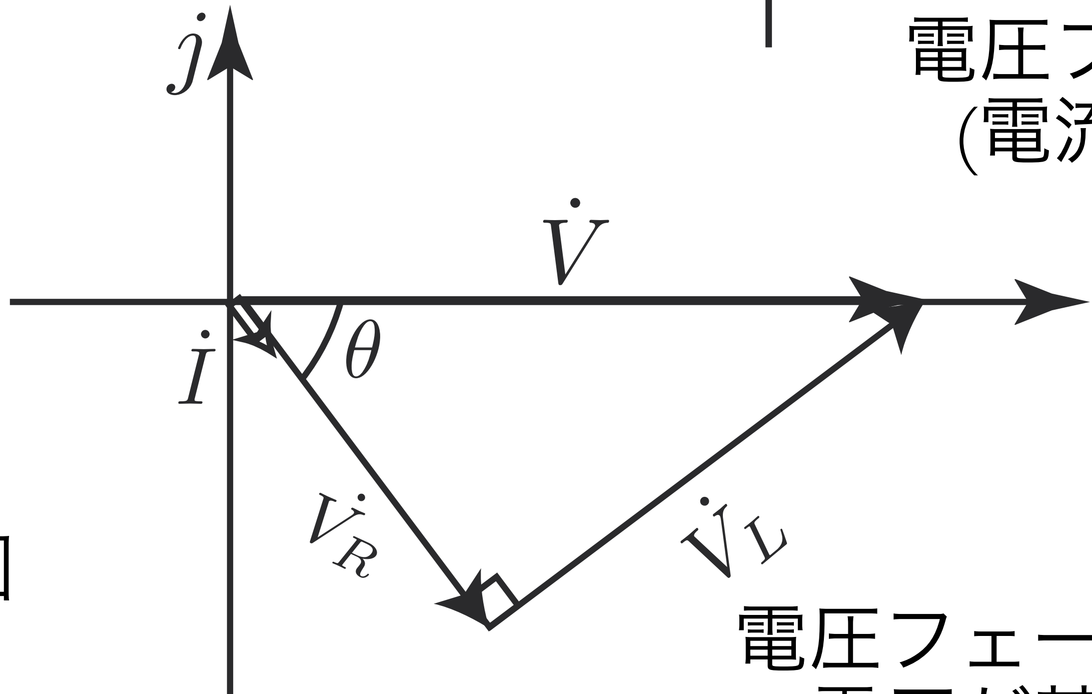
インピーダンス図と電圧フェーザ図による視覚的な理解



インピーダンス図
図4.8 (p.99)



電圧フェーザ図
(電流が基準)



電圧フェーザ図
(電圧が基準)

※インピーダンス図と電圧フェーザ図は別の空間

例題4.3 (p.100)

RL 直列回路において $R = 3[\Omega], L = 10[mH]$ である。角周波数 $\omega = 400[rad/s]$ で実効値が $I = 1.41[A]$、(位相 $\theta = 0$ ※断わりがない場合は 0 とする) の電流が流れるとき、加えられた複素電圧を求めよ。

例題4.3の出題意図

複素インピーダンスを求める

RL 直列回路において $R = 3[\Omega], L = 10[mH]$ である。角

$j\omega L$が求まる

周波数 $\omega = 400[rad/s]$ で実効値が $I = 1.41[A]$、(位相

複素電流を求める

$\theta = 0$ ※断わりがない場合は 0 とする) の電流が流れる

とき、加えられた複素電圧を求めよ。

式(4.55)を使う

回路の要素が与えられ、電圧か電流が未知な場合の解き方

1. 複素インピーダンスの式を立てる
2. 実部と虚部をそれぞれ簡単にする
3. 複素インピーダンスを極座標形式か指数関数形式に変換する
4. $\dot{V} = \dot{Z}\dot{I}$ から未知の値 (複素電圧、複素電流) を求める

回路の要素が与えられ、電圧か電流が未知な場合の解き方

1. 複素インピーダンスの式を立てる
2. 実部と虚部をそれぞれ簡単にする
3. 複素インピーダンスを極座標形式か指数関数形式に変換する
4. $\dot{V} = \dot{Z}\dot{I}$ から未知の値 (複素電圧、複素電流) を求める

例題4.3 解答例

$$\begin{aligned}\dot{Z} &= R + j\omega L = 3 + j400 \times 10 \times 10^{-3} \\ &= 3 + j4[\Omega] = 5e^{j53.1^\circ}[\Omega] = 5\angle 53.1^\circ[\Omega]\end{aligned}$$

複素電流は $\dot{I} = I\angle\theta = 1.41\angle 0^\circ$ より

$$\dot{V} = \dot{Z}\dot{I} = 5\angle 53.1 \times 1.41\angle 0^\circ = 7.05\angle(53.1^\circ + 0) = 7.05\angle 53.1^\circ[V]$$

4.5.2 RCの直列回路(p.100)

インピーダンス $\dot{Z}$ については $\dot{Z}_1 = R$ と $\dot{Z}_2 = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}$ の足し算と考えれば良い。全体のインピーダンス $\dot{Z} = R - j\frac{1}{\omega C}$ となる。抵抗 R と静電容量 C のコンデンサの電圧降下をそれぞれ $\dot{V}_R, \dot{V}_C$ とすると、

$$\dot{V}_R = R\dot{I}, \dot{V}_C = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}$$

キルヒホッフの第二法則より$\dot{V} - (\dot{V}_R + \dot{V}_C) = 0$ なので

$$\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_C = \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)\dot{I} = \dot{Z}\dot{I} \ldots (4.57, 60)$$

$$\dot{Z} = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = R + \frac{1}{j\omega C}[\Omega] = R - j\frac{1}{\omega C}[\Omega] \ldots (4.61)$$

$$= R + j\left(-\frac{1}{\omega C}\right)[\Omega]$$

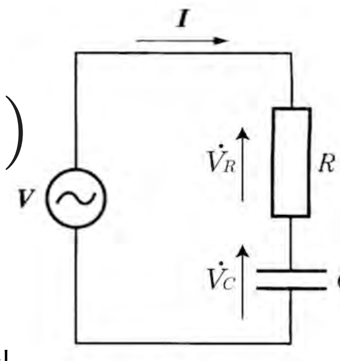


図 4.9

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦

4.5.2 RCの直列回路(p.100)

また $\dot{Z}$ は大きさを $|\dot{Z}|$、偏角を θ とすると

$$\dot{Z} = |\dot{Z}|e^{j\theta} = |\dot{Z}|\angle\theta \ldots (4.62)$$

$$|\dot{Z}| = \sqrt{R^2 + (-\frac{1}{\omega C})^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{-\frac{1}{\omega C}}{R} = \tan^{-1}\frac{-1}{\omega CR}$$

で求まる。従って式 (4.57) に代入すると

$$\dot{V} = |\dot{Z}|\angle\theta \times \dot{I}$$

となり、 $\dot{V}$ は $\dot{I}$ を「 $|\dot{Z}|$ 倍して位相を θ 進めた (θ は負)、即ち $|\theta|$ 遅らせた」値になる。

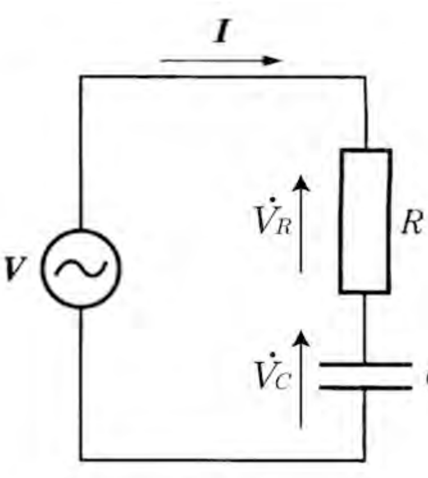
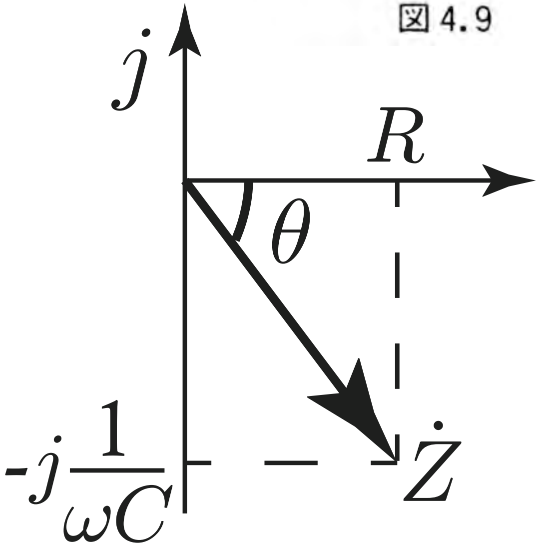
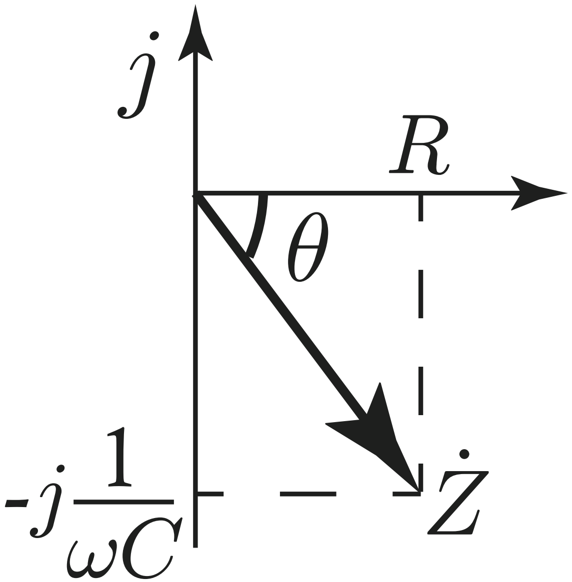


図 4.9

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著



インピーダンス図と電圧フェーザ図による視覚的な理解



インピーダンス図
図4.10 (p.101)

※インピーダンス図と電圧フェーザ図は別の空間

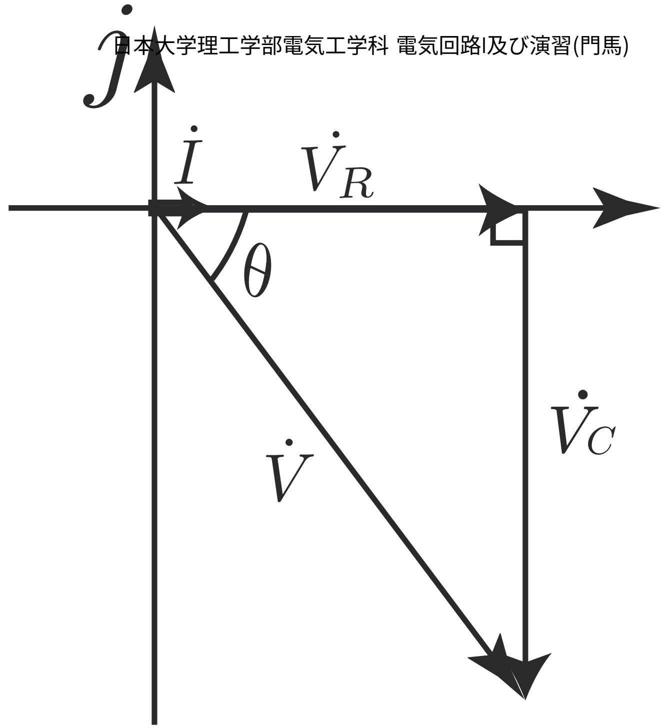
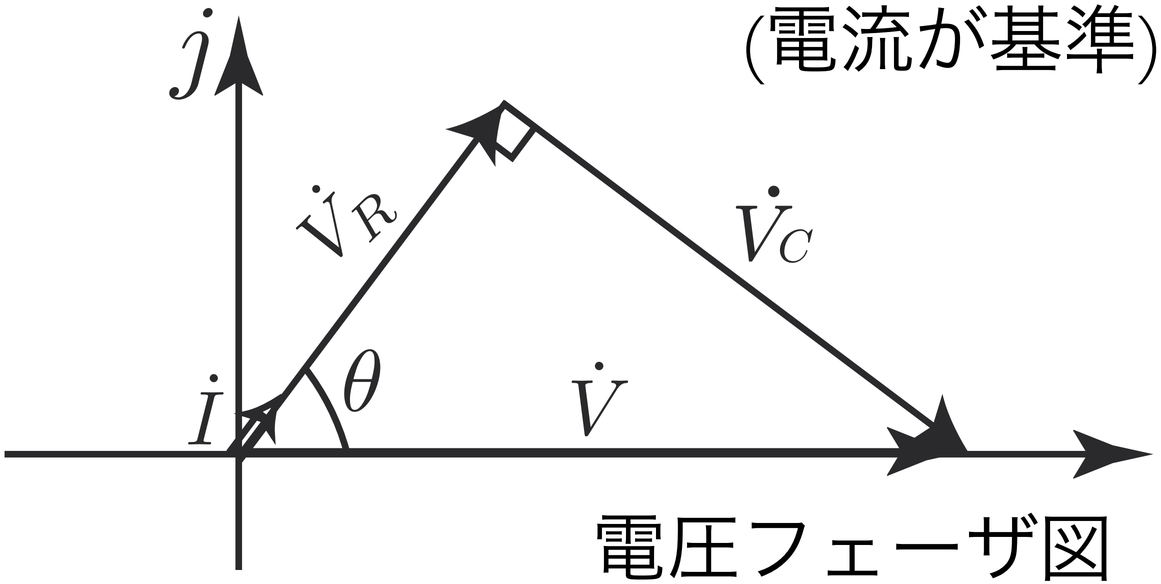


図4.11電圧フェーザ図
(電流が基準)



電圧フェーザ図
(電圧が基準)

Q. 14

$$\dot{Z} = R + \frac{1}{j\omega C}$$

に対して $R = 10k[\Omega], \omega = 2\pi f[rad/s],$
$f = 2k[Hz], C = 0.01\mu[F]$ のとき $\dot{Z}$ を求めよ

Q.14 解答

$$
\begin{aligned}
\dot{Z} &= R + \frac{1}{j\omega C} = 10 \times 10^3 + \frac{1}{j \times 2\pi \times 2 \times 10^3 \times 0.01 \times 10^{-6}} \\
&= 10 \times 10^3 + (j\pi \times 0.04 \times 10^3 \times 10^{-6})^{-1} \\
&= 10 \times 10^3 + (j\pi \times 0.04 \times 10^{-3})^{-1} \\
&\simeq 10000 - j7958 \,[\Omega] \\
&\simeq 12780\angle - 38.5^\circ \,[\Omega]
\end{aligned}
$$

- 10 [Exp] 3 [+][( ][**i**][2ndF][π][×] .04 [Exp][(-)] 3 [ )] [2ndF][x^{-1}][=]
- [2ndF][→**rθ**]で極座標系、[2ndF][→**xy**]で直交座標系