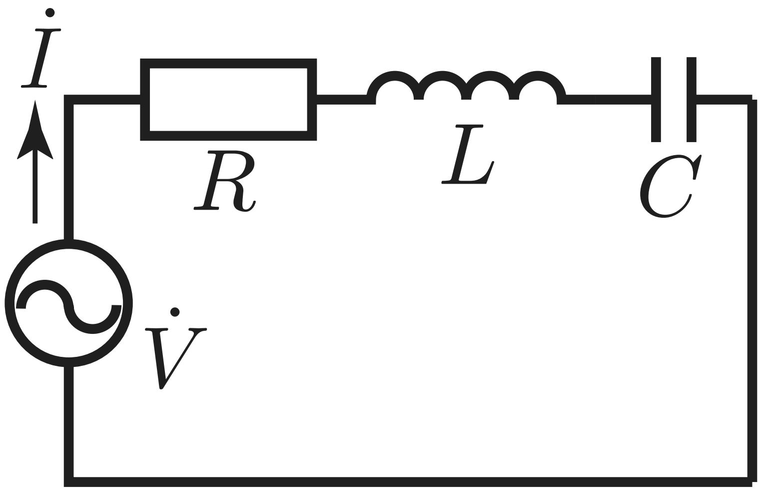
電気回路I及び演習

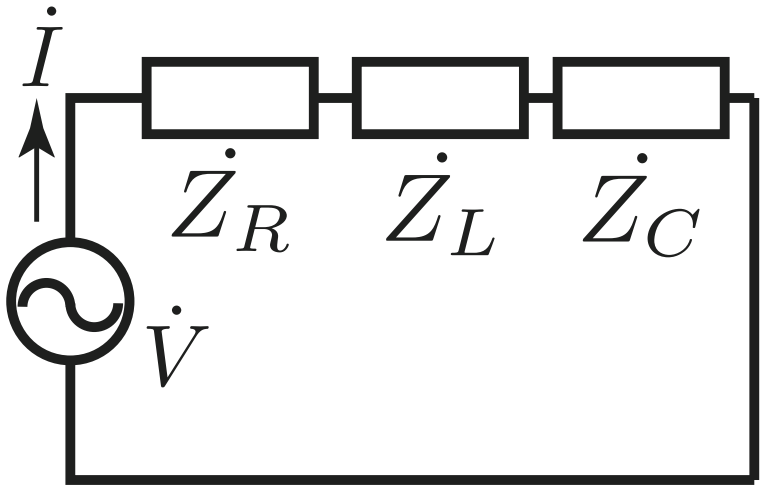
7. 複素アドミタンスとRL, RC, RLC並列回路

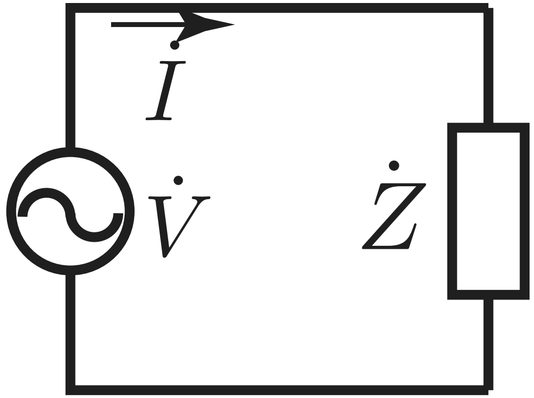
学習目標

- 複素インピーダンスの並列回路について、複素アドミタンスを用いた計算方法を理解する
- 並列回路における電流と電圧の関係を理解する

直列回路でやったこと

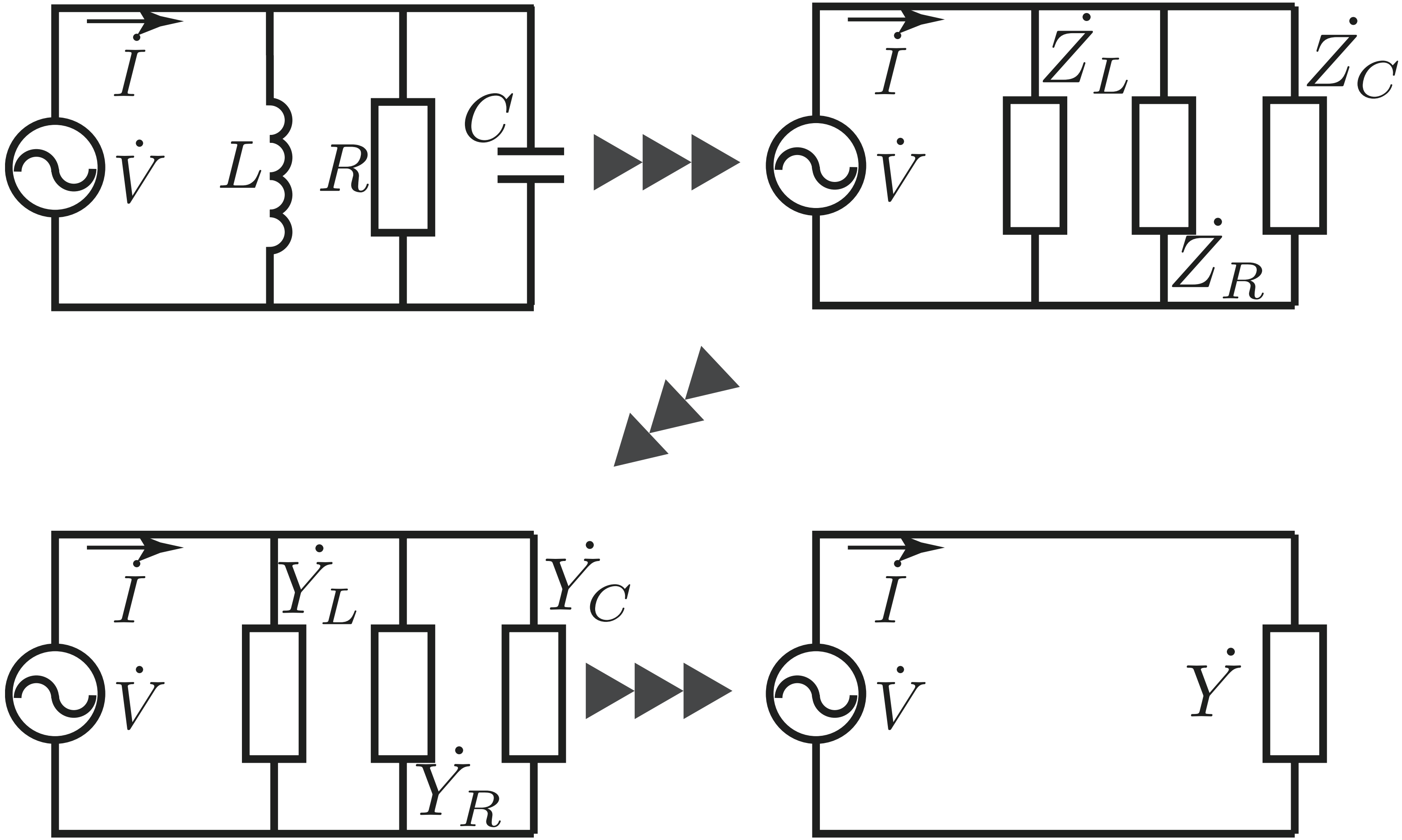






$$\dot{Z} = \dot{Z}_R + \dot{Z}_L + \dot{Z}_C$$

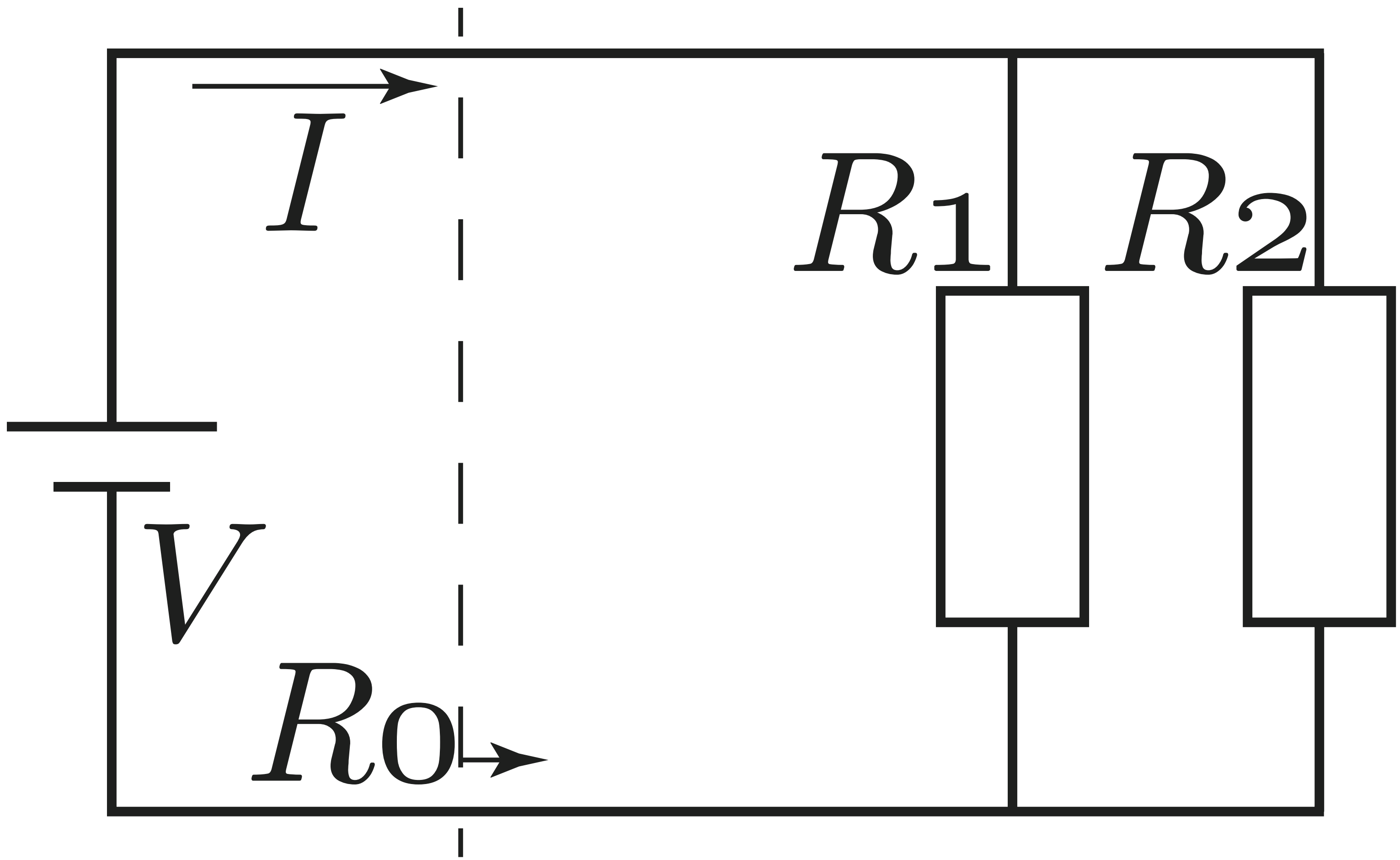
並列回路でやりたいこと



$$\dot{Y} = \dot{Y}_R + \dot{Y}_L + \dot{Y}_C$$

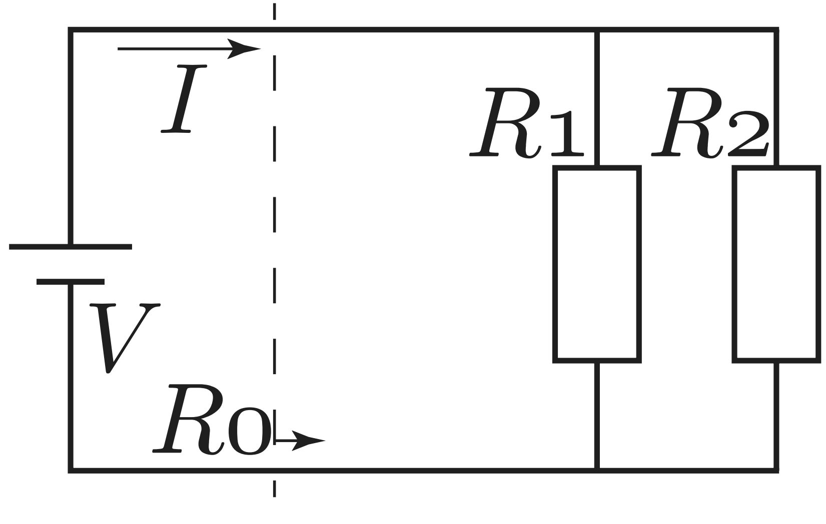
直流理論の復習

合成抵抗R_0は？

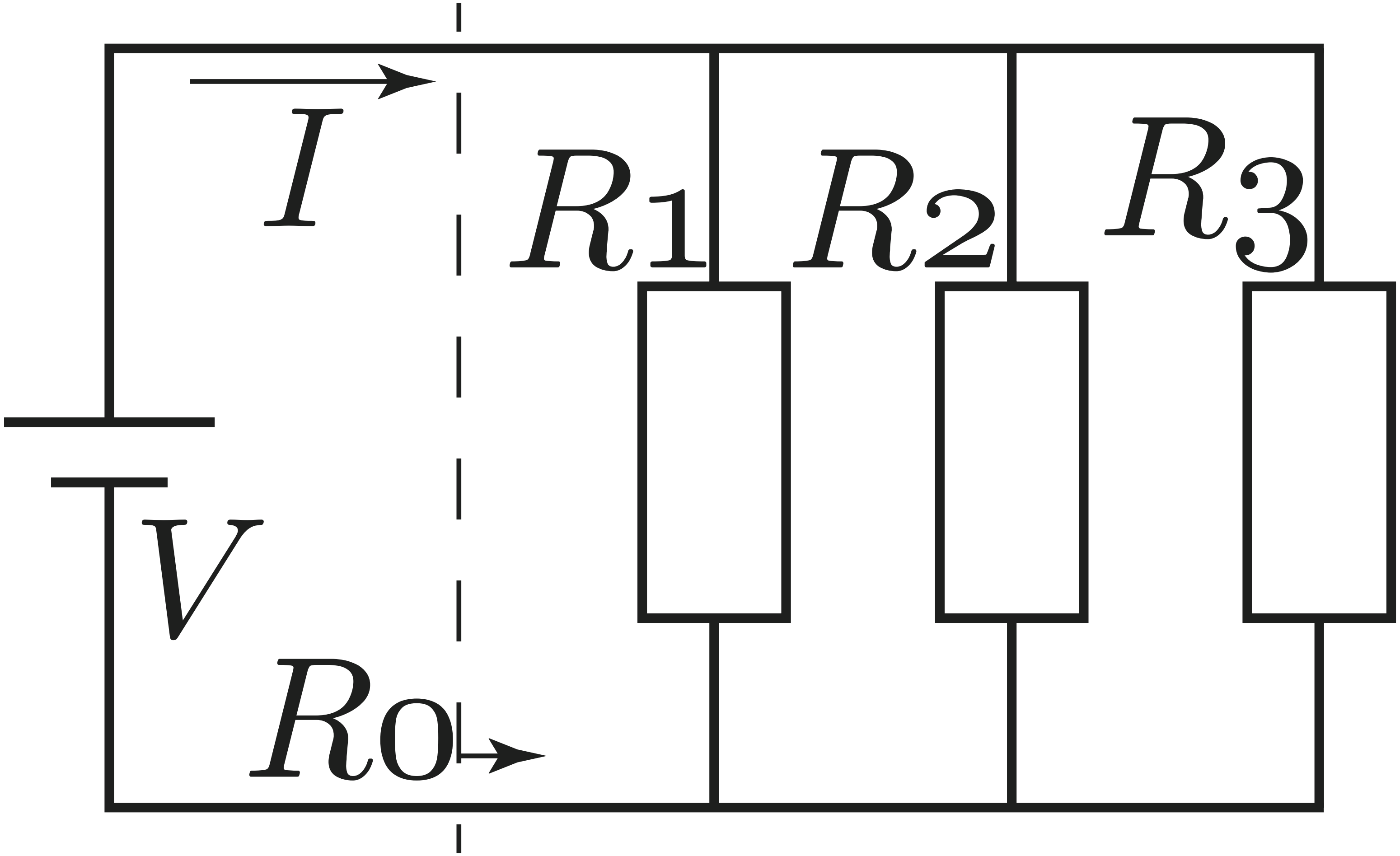


2個の並列抵抗は和分の積

$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$



合成抵抗R_0は？



R_1, R_2, R_3 に流れる電流を I_1, I_2, I_3 とすると、その和は I に等しいので $I = I_1 + I_2 + I_3$ となる。また並列回路では各枝路にかかる電圧は同じため、オームの法則より

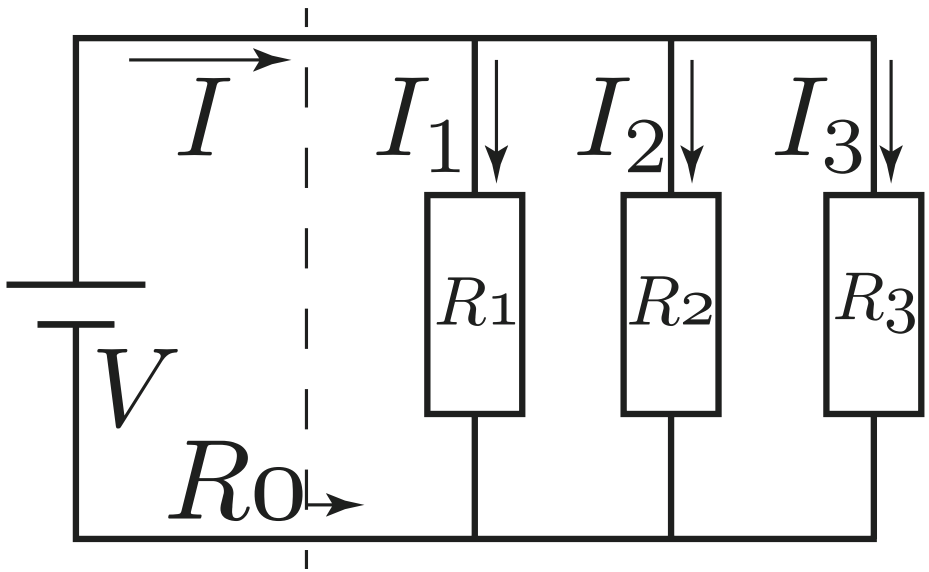
$$I_1 = \frac{V}{R_1}, I_2 = \frac{V}{R_2}, I_3 = \frac{V}{R_3}$$

となる。合成抵抗を R_0 とすると $I = \frac{V}{R_0}$ より

$$I = \frac{V}{R_0} = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3}$$

$$\therefore \frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$R_0 = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$



合成抵抗は枝路の抵抗の逆数の和の逆数

※忘れた人は教科書 1.3.2

コンダクタンス(p4)

コンダクタンス $G[S]$ を

$$G = \frac{1}{R}[S]$$

と定義する。(コンダクタンスは想像上の素子である)
オームの法則は

$$I = GV, V = \frac{I}{G}$$

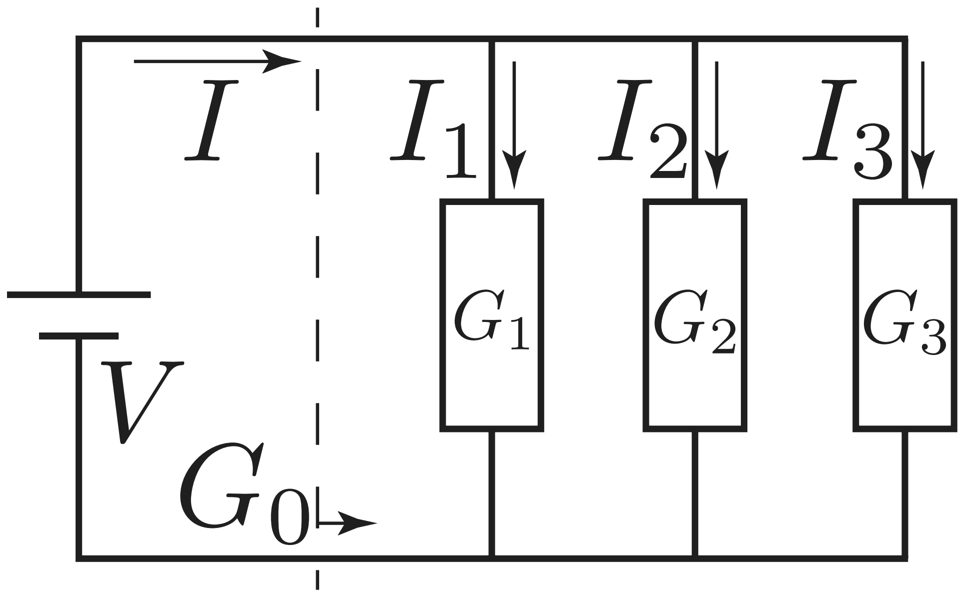
となる。

このコンダクタンスを並列回路の合成抵抗の計算に適用すると $G = \frac{1}{R}$ より

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

合成コンダクタンス $G_0 = G_1 + G_2 + G_3$

並列回路については、枝路の抵抗の逆数の和の逆数である合成抵抗 R_0 を求めずに、各枝路のコンダクタンスの和より合成コンダクタンス G_0 を求め、$I = G_0 V$ を用いて計算をした方が簡単。



抵抗とコンダクタンスの概念を複素インピーダンスに適用する

複素インピーダンスと複素アドミタンス(p95)

コンダクタンス (p. 4 式 (1.3): $I = \frac{V}{R} = GV, G = \frac{1}{R}[S]$) と同じ考え方で、複素インピーダンス $\dot{Z}$ の逆数。

$$\text{複素アドミタンス}\dot{Y} = \frac{1}{\dot{Z}}[S]([\mho])$$

複素アドミタンス $\dot{Y}$ の実部と虚部の成分はそれぞれ、コンダクタンス G、サセプタンス B で表わされ、大きさ $|\dot{Y}|$ および偏角 θ で表わすことも出来る。

$$\dot{Y} = G + jB[S] = |\dot{Y}|\angle\theta = |\dot{Y}|e^{j\theta}[S]$$

※アドミタンス $\dot{Y}$ も計算を効率良く行なうための想像上の素子である点に注意

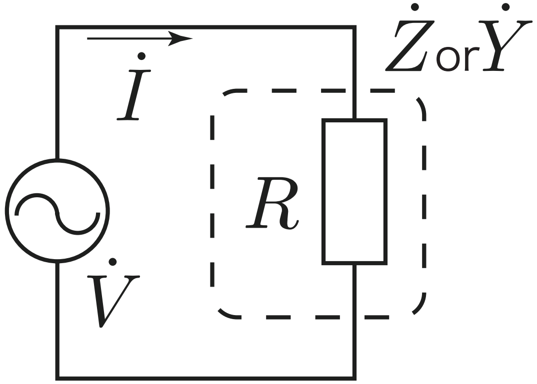
$$\dot{Y} = G + jB[S] = |\dot{Y}|\angle\theta = |\dot{Y}|e^{j\theta}[S]$$

※アドミタンス $\dot{Y}$ も計算を効率良く行なうための想像上の素子である点に注意
但し、複素インピーダンス $\dot{Z}$ とは電流電圧の関係が異なるため、インピーダンスの偏角とは値そのものは異なる点に注意。

$$\dot{I} = \dot{V}\dot{Y}(\text{または}\dot{V} = \frac{\dot{I}}{\dot{Y}})$$

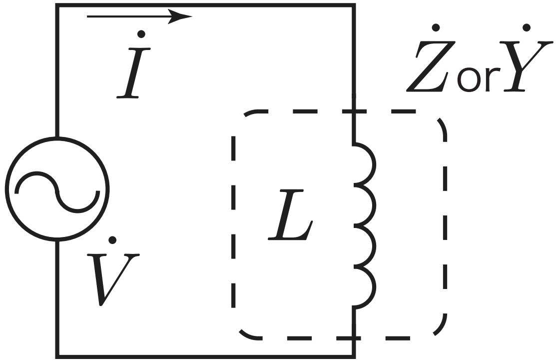
複素アドミタンスを用いる上記の式では、「電流は電圧 $\dot{V}$ に対して大きさを $|\dot{Y}|$ 倍し、位相を θ 進めたもの」を意味する。
(複素インピーダンスは $\dot{V} = \dot{I}\dot{Z}$ より「電圧は電流 $\dot{I}$ に対して大きさを $|\dot{Z}|$ 倍し、位相を θ_z 進めたもの」を意味する。また、逆数の関係より $\theta_z = -\theta$)

単一の素子での複素インピーダンスと複素アドミタンス



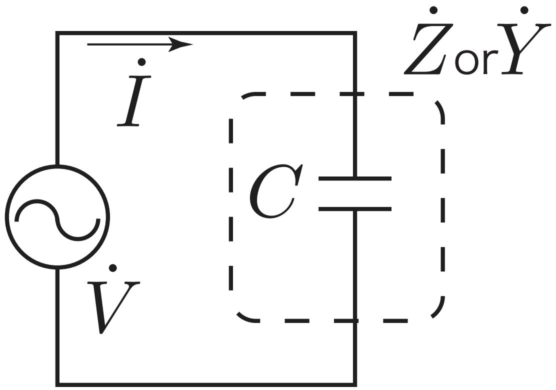
$$\dot{Z}_R = R[\Omega]$$

$$\dot{Y}_R = \frac{1}{R}[S]$$



$$\dot{Z}_L = j\omega L = \omega L \angle 90^\circ [\Omega]$$

$$\dot{Y}_L = \frac{1}{j\omega L} = -j\frac{1}{\omega L} = \frac{1}{\omega L}\angle(-90^\circ)[S]$$



$$\dot{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C}\angle(-90^\circ)[\Omega]$$

$$\dot{Y}_C = j\omega C = \omega C \angle 90^\circ [S]$$

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著

複素インピーダンスと並列回路

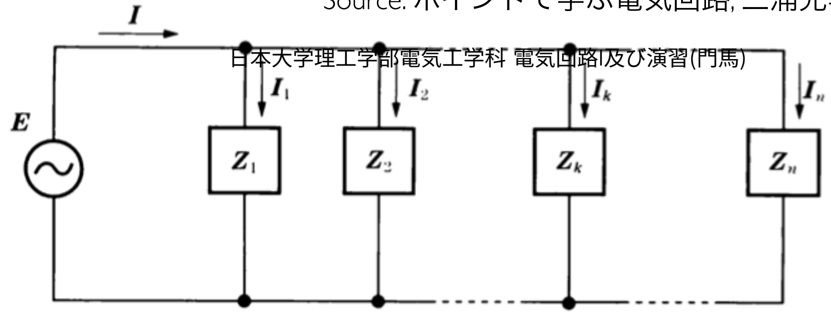


図 4.6

各インピーダンスに流れる電流を $\dot{I}_x (x = 1, 2, \cdots, n)$ とすると全体の電流はこれらの和なので $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \cdots + \dot{I}_k + \cdots \dot{I}_n$ となる。並列回路では各枝路に電圧 $\dot{E}$ がかかるため、オームの法則より

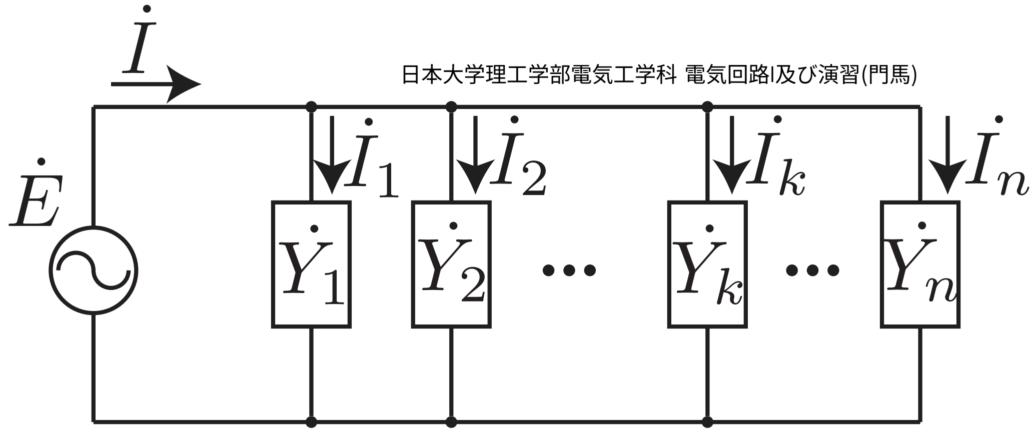
$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}_1}, \dot{I}_2 = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}_2}, \cdots, \dot{I}_k = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}_k}, \cdots, \dot{I}_n = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}_n}$$

回路の合成インピーダンスを $\dot{Z}_0$ とすると、$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{\dot{Z}_0}$ より

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}_0} = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}_1} + \frac{\dot{E}}{\dot{Z}_2} + \cdots + \frac{\dot{E}}{\dot{Z}_k} + \cdots + \frac{\dot{E}}{\dot{Z}_n}$$

となる。

複素アドミタンスの適用



$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}_0} = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}_1} + \frac{\dot{E}}{\dot{Z}_2} + \cdots + \frac{\dot{E}}{\dot{Z}_k} + \cdots + \frac{\dot{E}}{\dot{Z}_n}$$

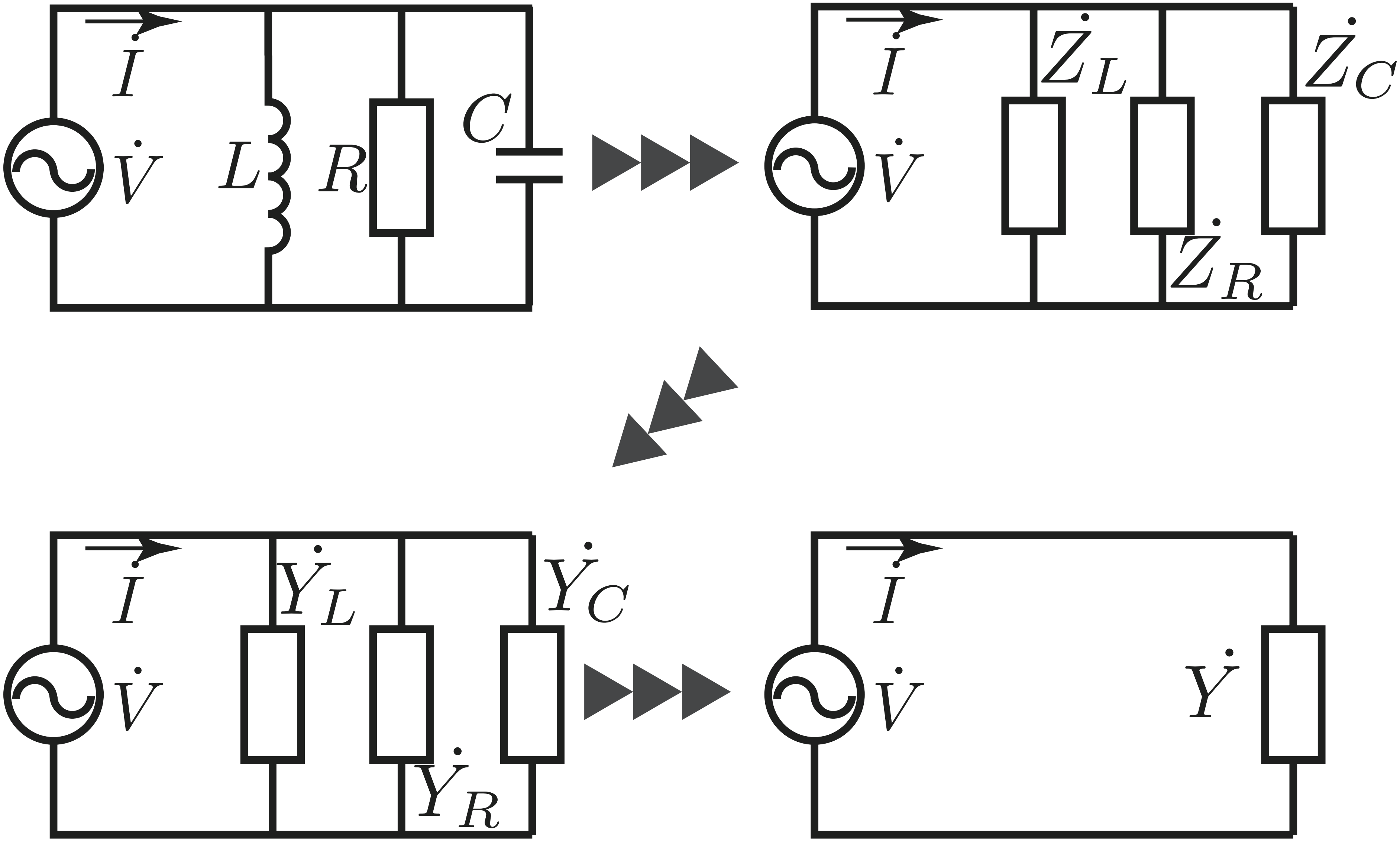
合成アドミタンスを $\dot{Y}_0$ として、各素子のアドミタンスを用いると

$$\dot{I} = (\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \cdots + \dot{Y}_k + \cdots + \dot{Y}_n)\dot{E} = \dot{Y}_0\dot{E}$$

となる。従ってアドミタンスを用いれば並列回路をそれらの和として簡単に計算できる

単純な並列回路では効果が分からないが
複雑な回路で力を発揮する

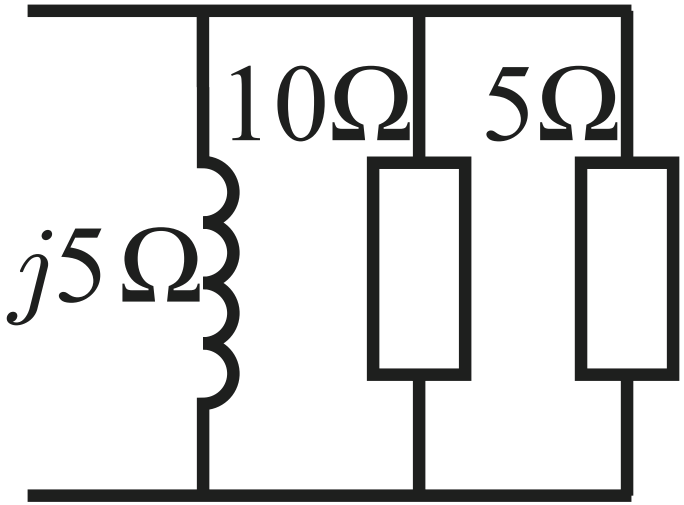
並列回路の考え方



$$\dot{Y} = \dot{Y}_R + \dot{Y}_L + \dot{Y}_C$$

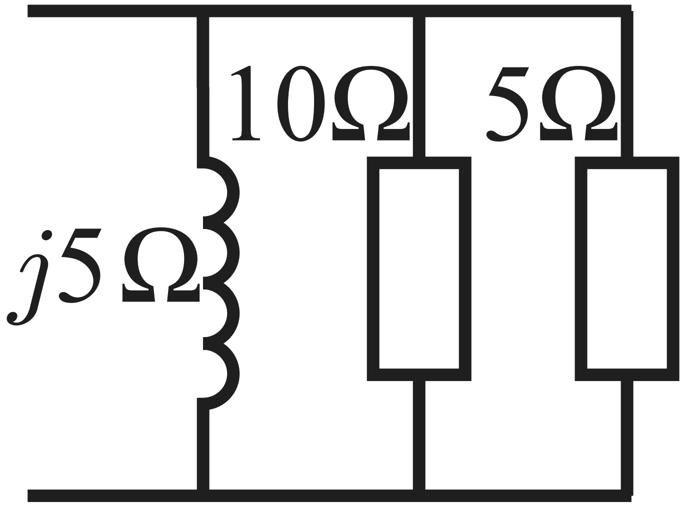
例題

図の並列回路の合成アドミタンスを求めよ。



例題

図の並列回路の合成アドミタンスを求めよ。



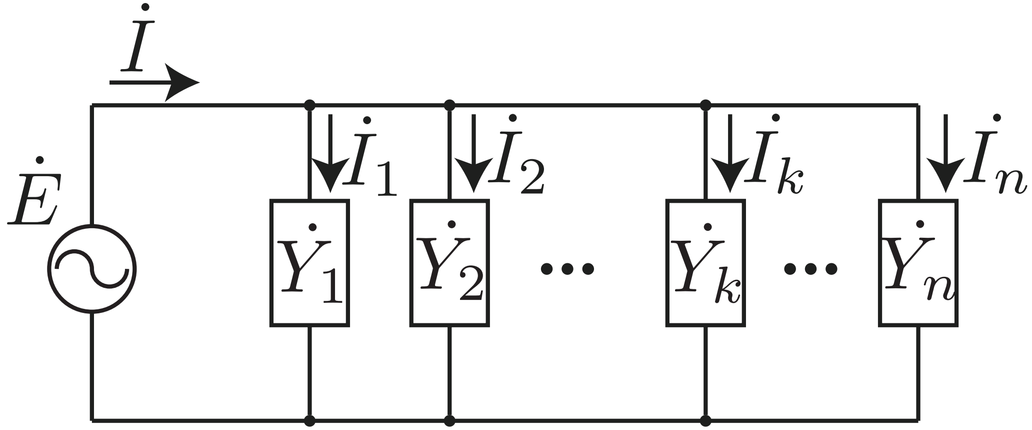
解答例

$$\dot{Y} = \frac{1}{j5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = -j0.2 + 0.1 + 0.2 = 0.3 - j0.2[S]$$

分流の法則(p97)

$$\dot{I} = (\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \cdots + \dot{Y}_k + \cdots + \dot{Y}_n)\dot{E} = \dot{Y}\dot{E} ...(*)$$

$\dot{Y}_k$ について考えると



$$\dot{E} = \frac{\dot{I}_k}{\dot{Y}_k}$$

$(*)$ へ代入すると

$$\dot{I} = (\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \cdots + \dot{Y}_k + \cdots + \dot{Y}_n) \times \frac{\dot{I}_k}{\dot{Y}_k}$$

$$\dot{I}_k = \frac{\dot{Y}_k}{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \cdots + \dot{Y}_k + \cdots + \dot{Y}_n}\dot{I} = \frac{\dot{Y}_k}{\dot{Y}}\dot{I} \ldots (4.51)$$

教科書の内容に沿った説明

4.6.2 RLC並列回路(p112)

図 4.21 の回路の合成アドミタンス $\dot{Y}$ は

$$\dot{Y} = \dot{Y}_R + \dot{Y}_L + \dot{Y}_C = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \ldots (4.95)$$

また、複素空間でのベクトルとして扱えるので

$$\dot{Y} = |\dot{Y}|e^{j\theta} = |\dot{Y}|\angle\theta \ldots$$

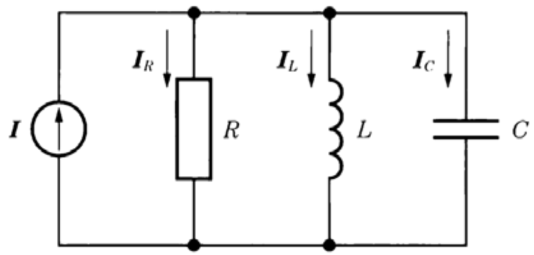


図 4.21

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著

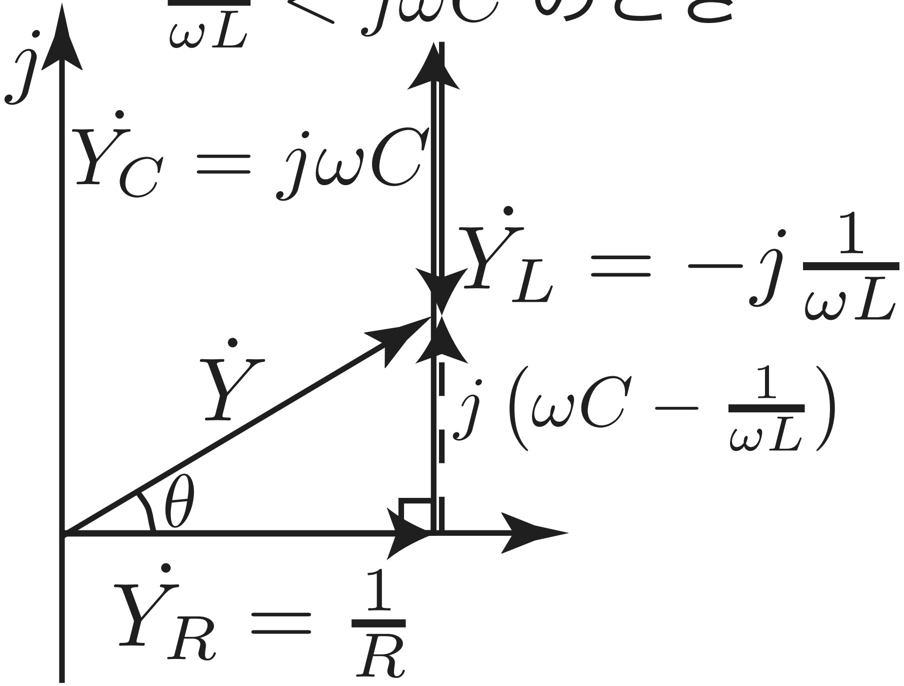
$$\text{大きさ } |\dot{Y}| = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

$$\text{偏角}\theta = \tan^{-1}\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{\frac{1}{R}} \ldots (4.77)$$

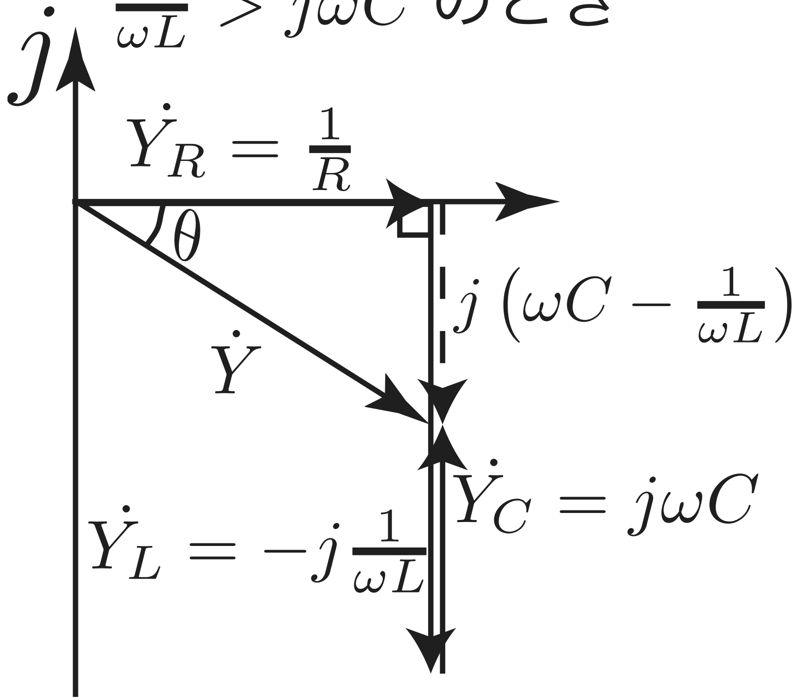
あとは $\dot{I} = \dot{Y}\dot{V}$ の関係を用いて計算する。

アドミタンス図

$\frac{1}{\omega L} < j\omega C$ のとき



$\frac{1}{\omega L} > j\omega C$ のとき



4.5.3 RL並列回路(p102)

図 4.12 の各枝路のアドミタンスはそれぞれ $\dot{Y}_R, \dot{Y}_L$ とすると、

$$\dot{Y}_R = \frac{1}{R}, \dot{Y}_L = \frac{1}{j\omega L}$$

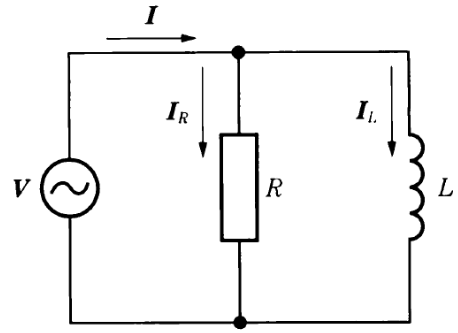


図 4.12
Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著

回路全体の合成アドミタンス $\dot{Y}$ は

$$\dot{Y} = \dot{Y}_R + \dot{Y}_L = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{R} + j\left(-\frac{1}{\omega L}\right) [S] \ldots (4.66)$$

複素電圧 $\dot{V}$ 、複素電流 $\dot{I}$ とアドミタンス $\dot{Y}$ の関係は $\dot{I} = \dot{Y}\dot{V}$

RL並列回路のアドミタンス図とフェーザ図

複素アドミタンスは

$$\dot{Y} = \dot{Y_R} + \dot{Y_L} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{R} + j\left(-\frac{1}{\omega L}\right)[S] \ldots (4.66)$$

$$= |\dot{Y}|e^{j\theta} = |\dot{Y}|\angle\theta \ldots (4.68)$$

$$|\dot{Y}| = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{-1}{\omega L}\right)^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\frac{-1}{\omega L}}{\frac{1}{R}} = \tan^{-1}\left(-\frac{R}{\omega L}\right)$$

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著

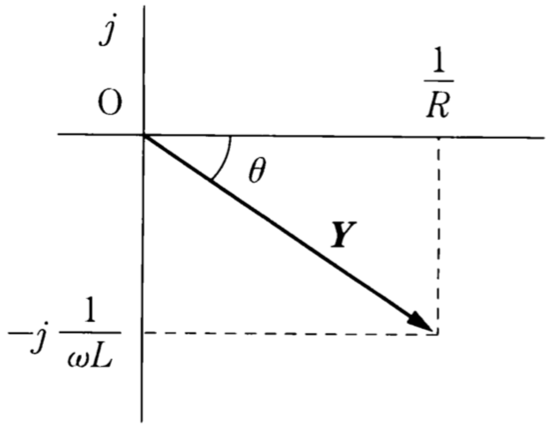
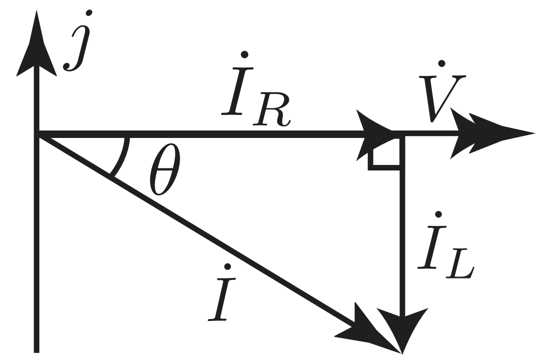


図 4.13

また、R, L に流れる複素電流をそれぞれ $\dot{I}_R, \dot{I}_L$ とすると

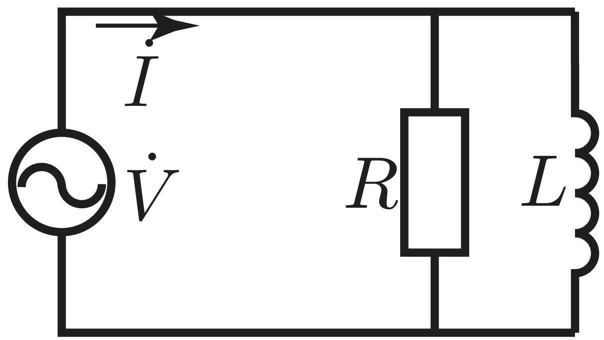
$$\dot{I}_R = \frac{\dot{V}}{R}, \dot{I}_L = \frac{\dot{V}}{j\omega L} = -j\frac{\dot{V}}{\omega L} = \frac{\dot{V}}{\omega L}\angle(-90^\circ)$$



電圧を基準 (位相を 0°) とすると、フェーザ図は右図となる。

例題

RL 並列回路において $R=4[\Omega], L=5[mH]$ である。交流電圧 $v=10\sin 1000t[V]$ を加えたとき、以下の問に答えよ。



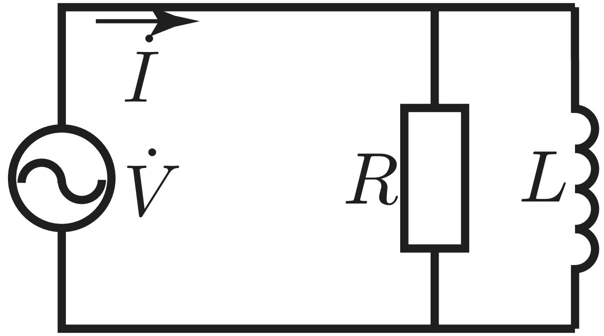
(1) 瞬時値 v より複素電圧 $\dot{V}$ を求めよ。

(2) 回路の合成アドミタンス $\dot{Y}$ を求めよ。

(3) 回路を流れる電流について、各枝路と全電流 $\dot{I}_R, \dot{I}_L, \dot{I}$ を求めよ。

例題

RL 並列回路において $R=4[\Omega], L=5[mH]$ である。交流電圧 $v=10\sin 1000t[V]$ を加えたとき、以下の問に答えよ。



(1) 瞬時値 v より複素電圧 $\dot{V}$ を求めよ。

(2) 回路の合成アドミタンス $\dot{Y}$ を求めよ。

$$\dot{Y}_R=?, \dot{Y}_L=?, \dot{Y}=\dot{Y}_R+\dot{Y}_L$$

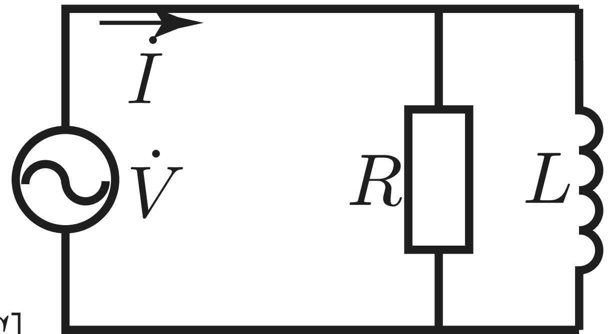
(3) 回路を流れる電流について、各枝路と全電流 $\dot{I}_R, \dot{I}_L, \dot{I}$ を求めよ。

$$\dot{I}=\dot{I}_R+\dot{I}_L$$

解答例

(1) $V_m = 10$ より $V = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}[V]$ で、$\theta = 0$ より $\dot{V} = 5\sqrt{2}[V]$

(2) $R = 4, L = 5 \times 10^{-3}, \omega = 1000$ より



$$\dot{Y_R} = \frac{1}{4} = 0.25[S]$$

$$\dot{Y_L} = \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{j5} = -j0.2[S] = 0.2\angle(-90^\circ)[S]$$

$$\dot{Y} = \dot{Y_R} + \dot{Y_L} = 0.25 - j0.2[S] \simeq 0.32\angle(-38.7^\circ)[S]$$

(3)

$$\dot{I_R} = \dot{Y_R}\dot{V} = 0.25 \times 5\sqrt{2} \simeq 1.77[A]$$

$$\dot{I_L} = \dot{Y_L}\dot{V} = 0.2\angle(-90^\circ) \times 5\sqrt{2} =\simeq 1.41\angle(-90^\circ)[A] = -j1.41[A]$$

$$\dot{I} = \dot{I_R} + \dot{I_L} = 1.77 - j1.41[A] \simeq 2.26\angle(-38.5^\circ)[A]$$

4.5.4 RC並列回路(p103)

図 4.14 の各枝路のアドミタンスはそれぞれ $\dot{Y}_R, \dot{Y}_C$ とすると、

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著

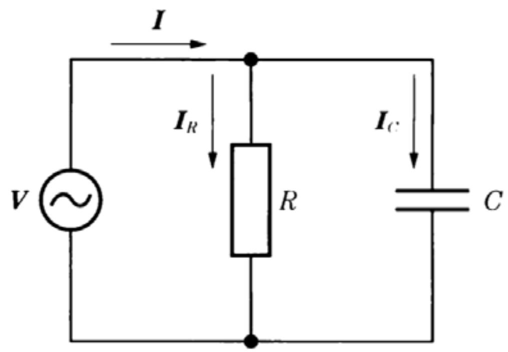


図 4.14

$$\dot{Y}_R = \frac{1}{R}, \dot{Y}_C = j\omega C$$

回路全体の合成アドミタンス $\dot{Y}$ は

$$\dot{Y} = \dot{Y}_R + \dot{Y}_C = \frac{1}{R} + j\omega C[S] \ldots (4.71)$$

複素電圧 $\dot{V}$ 、複素電流 $\dot{I}$ とアドミタンス $\dot{Y}$ の関係は $\dot{I} = \dot{Y}\dot{V}$

RC並列回路のアドミタンス図とフェーザ図

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著

複素アドミタンス Y は

$$\dot{Y} = \dot{Y_R} + \dot{Y_C} = \frac{1}{R} + j\omega C \ldots (4.71)$$

$$= |\dot{Y}|e^{j\theta} = |\dot{Y}|\angle\theta \ldots (4.72)$$

$$|\dot{Y}| = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C)^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\omega C}{\frac{1}{R}} = \tan^{-1}(\omega CR)$$

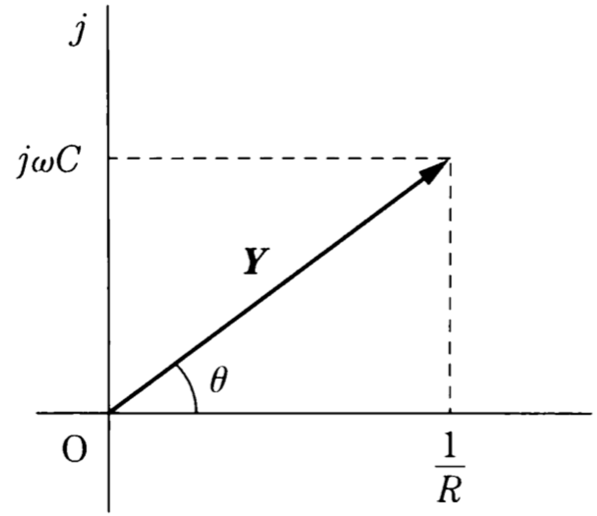
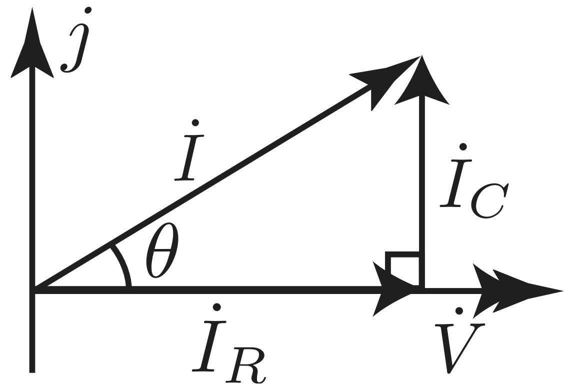


図 4.15

また、R, C に流れる複素電流をそれぞれ $\dot{I_R}, \dot{I_C}$ とすると

$$\dot{I_R} = \frac{\dot{V}}{R}, \dot{I_C} = j\omega C\dot{V} = \omega C\dot{V}\angle 90^\circ$$



電圧を基準 (位相を 0°) とすると、フェーザ図は右図となる。

例題 4.4 (p105)

RC 並列回路において $R = 4[\Omega], C = 200[\mu F]$ である。角周波数 $\omega = 1000[rad/s]$ で実効値が $7.07[V]$ の電圧を加えたとき、回路を流れる電流を複素数表示によって求めよ。

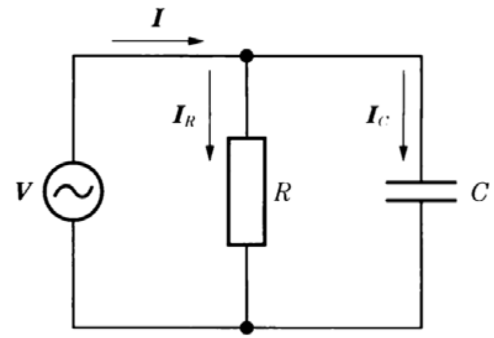


図 4.14

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著

例題 4.4 (p105)

RC 並列回路において $R = 4[\Omega], C = 200[\mu F]$ である。

角周波数 $\omega = 1000[rad/s]$ で実効値が $7.07[V]$ の電圧を

加えたとき、回路を流れる電流を複素数表示によって求

めよ。

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著

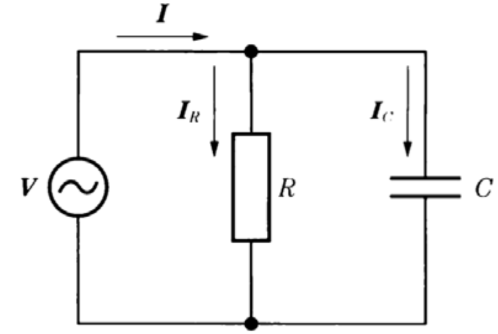


図 4.14

方針: R, Cから各枝路のアドミタンスY_R, Y_C

を求め、その和からI=YVを求める

例題 4.4 解答

各枝路のアドミタンスはから合成アドミタンスを求めると

$$\dot{Y}_R = \frac{1}{R} = \frac{1}{4} = 0.25[S]$$

$$\dot{Y}_C = j\omega C = j1000 \times 200 \times 10^{-6} = j0.2[S] = 0.2\angle 90^\circ [S]$$

$$\dot{Y} = \dot{Y}_R + \dot{Y}_C = 0.25 + j0.2[S] = 0.320\angle 38.7^\circ [S]$$

$\dot{I} = \dot{Y}\dot{V}, \dot{V} = 7.07[V]\angle 0^\circ$ より

$$\dot{I} = \dot{Y}\dot{V} = 0.320\angle 38.7^\circ \times 7.07 = 2.26\angle 38.7^\circ [A]$$

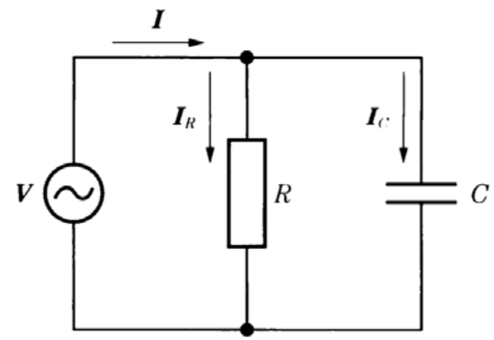


図 4.14

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著

電圧、電流、インピーダンス、アドミタンスの考え方のまとめ

- 直列回路ではインピーダンスの和で合成インピーダンスが求まる
- 並列回路ではアドミタンスの和で合成アドミタンスが求まる
- 直列並列が混在している回路では部分的に考える (次回)
- $\dot{V} = \dot{I}\dot{Z} = \dot{I}|\dot{Z}|\angle\theta_1$ より $\dot{V}$ は $\dot{I}$ を $|\dot{Z}|$ 倍して、位相を θ_1 進めたもの (θ_1 が負であれば遅れ)
- $\dot{I} = \dot{V}\dot{Y} = \dot{V}|\dot{Y}|\angle\theta_2$ より $\dot{I}$ は $\dot{V}$ を $|\dot{Y}|$ 倍して、位相を θ_2 進めたもの (θ_2 が負であれば遅れ)
- 同じ回路では $\dot{Y} = \frac{1}{\dot{Z}}$ の関係より $\theta_1 = -\theta_2$ が成り立つ

RLC直列回路でのフェーザ

直列に繋がれた各素子に加わる電圧の総和は、全素子に加わる電圧に等しい。※ただしベクトルの和

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著

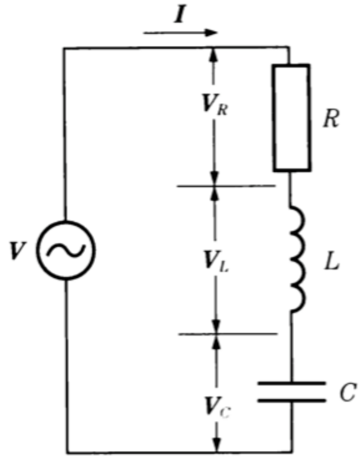


図 4.17

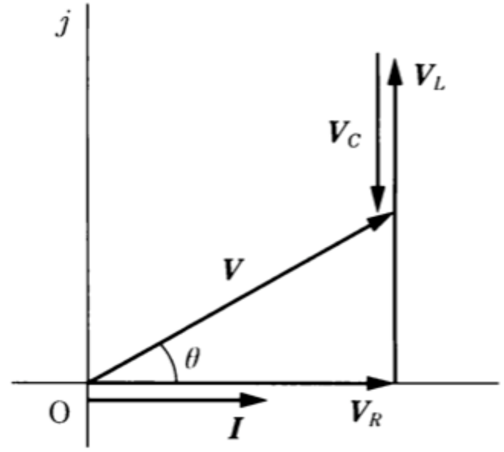


図 4.18

図は $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ の場合

$$\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_L + \dot{V}_C$$

また、$\dot{V} = \dot{I}\dot{Z}$ の関係より

1. 各素子に流れる電流は同一の $\dot{I}$
2. 抵抗に生じる電圧と電流は同相
3. L, C に生じる電圧は電流に対して位相が $+90°, -90°$ 異なる (進み、遅れ)
4. インピーダンスの位相が θ であるとき、電圧は電流に対して θ 進む

RLC並列回路でのフェーザ

並列に繋がれた各素子に流れる電流の総和は、合成アドミタンスに流れる電流に等しい。※ただしベクトルの和

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C$$

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦光著

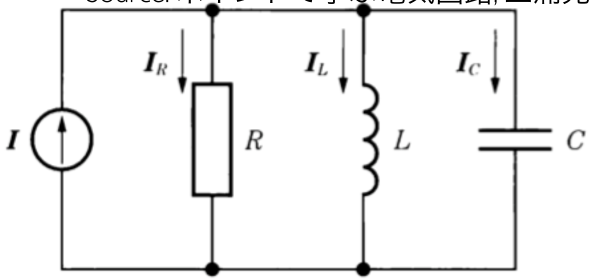
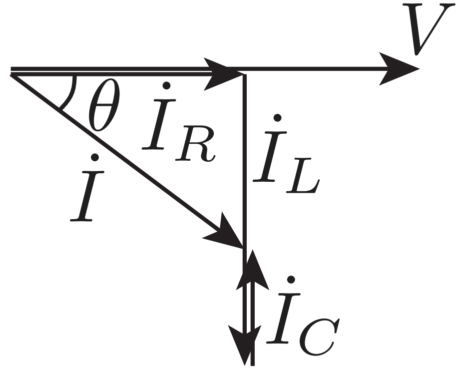


図 4.21



図は $\omega C < \frac{1}{\omega L}$ の場合

また、$\dot{I} = \dot{Y}\dot{V}$ の関係より

1. 各素子にかかる電圧は同一の $\dot{V}$
2. 抵抗に流れる電流と電圧は同相
3. L, C に流れる電流は電圧に対して位相が $-90°, +90°$ 異なる (遅れ、進み)
4. アドミタンスの位相が θ であるとき、電流は電圧に対して θ 進む