

電気回路I及び演習

13. 交流ブリッジとベクトル軌跡

学習目標

- 複素インピーダンスを用いた交流ブリッジの平衡条件と、未知のインピーダンスの計算方法を理解する
- ベクトル軌跡と逆図形の関係を理解する
- ベクトル軌跡の考え方、描画方法を理解する
- インピーダンス・アドミタンスのベクトル軌跡と電圧・電流のフェーザ軌跡との関係を理解する

5.3 交流ブリッジ回路 (p.124)

配布用

交流ブリッジ: 平衡条件を利用して未知のインピーダンスを求める回路

ブリッジ回路の平衡: 検流計の振れが0(=電流がc, d間に流れない)

c, d間に電流が流れないことは、両点の電位が等しいことを示している。従って

$$\dot{I}_1 \dot{Z}_1 = \dot{I}_2 \dot{Z}_2, \dot{I}_1 \dot{Z}_3 = \dot{I}_2 \dot{Z}_4 \dots (5.15)$$

が成り立つ。両式の辺々で除すとブリッジ回路の平衡条件が求まる

$$\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_3} = \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_4} \text{ または } \dot{Z}_1 \dot{Z}_4 = \dot{Z}_2 \dot{Z}_3 \dots (5.16)$$

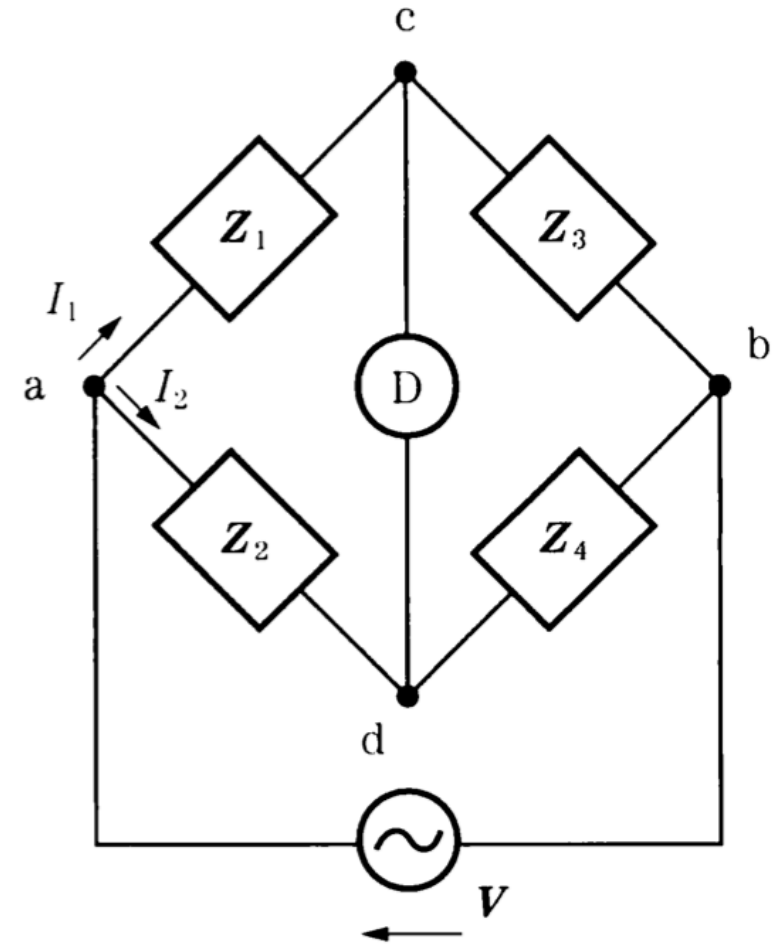
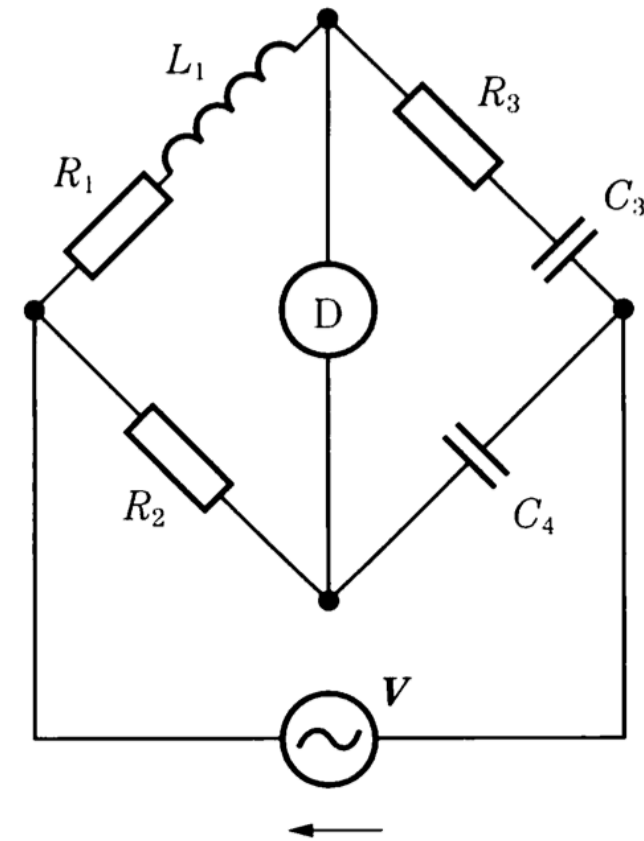


図 5.6

添字は変わる可能性がある所以对向するインピーダンスの積が等しくなると覚える

例題5.3 (p.125)

例図 5.2 に示したブリッジ回路において、コイルの自己インダクタンス L_1 および R_1 が未知であるとき、他の素子の大きさを調節して平衡を得た (検流計 D を流れる電流が零)。平衡条件から L_1 および R_1 を求めよ



例図 5.2

交流ブリッジ回路の計算方法

1. 各枝のインピーダンスを求める
 2. 式(5.16)から平衡条件の式を求める
 3. 実部と虚部の比較がしやすいように、両辺を整理する
 4. 整理した式を実部と虚部に分けて、未知の値を求める
- 枝に並列回路がある場合も**インピーダンス**が必要

例題 5.3 の解法

平衡条件を利用するが、複素インピーダンスを扱うため実部と虚部が存在する。従って、平衡条件は実部と虚部に分けて考える必要がある。 $Z_1 = R_1 + j\omega L_1$, $Z_2 = R_2$, $Z_3 = R_3 - j\frac{1}{\omega C_3}$, $Z_4 = -j\frac{1}{\omega C_4}$ と式 (5.16) より

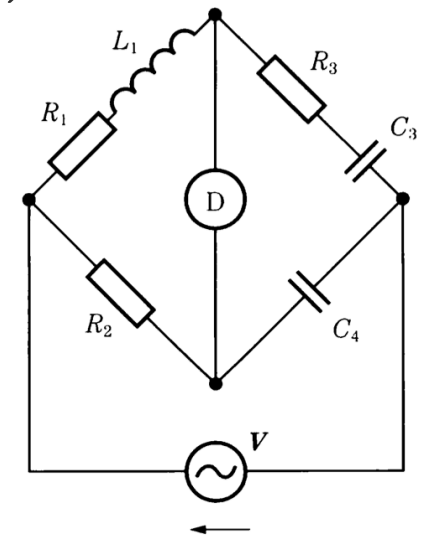
$$(R_1 + j\omega L_1) \times -j\frac{1}{\omega C_4} = R_2 \times \left(R_3 - j\frac{1}{\omega C_3} \right)$$

$$\frac{L_1}{C_4} - j\frac{R_1}{\omega C_4} = R_2 R_3 - j\frac{R_2}{\omega C_3}$$

となり平衡条件を実部と虚部について考えると、

$$\text{実部: } \frac{L_1}{C_4} = R_2 R_3, \text{ 虚部: } -\frac{R_1}{\omega C_4} = -\frac{R_2}{\omega C_3}$$

よって $L_1 = R_2 R_3 C_4$ と $R_1 = \frac{R_2 C_4}{C_3}$ が解である。



例図 5.2

5.4 ベクトル軌跡 (p.126)

複素インピーダンス $\dot{Z} = R + jX$ 、複素アドミタンス $\dot{Y} = \frac{1}{\dot{Z}} = G + jB$ で R, X, G, B 成分、または電源電圧、電流の角周波数を $0 \sim \infty$ まで変化させた時の複素平面状上のベクトルの先端の動きをベクトル軌跡と呼ぶ。また、 R, G は負にならないので第一、第四象限のみの図となる。

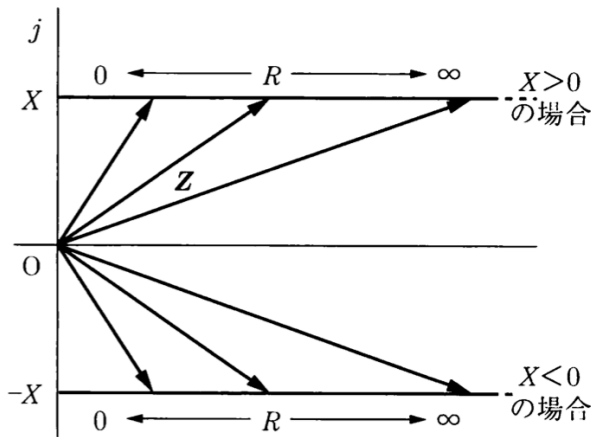


図 5.7

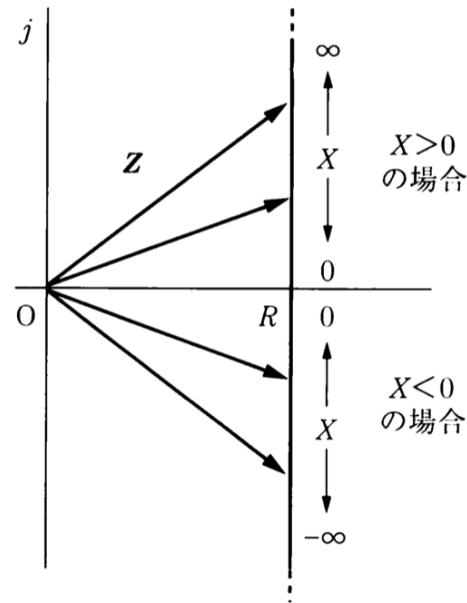


図 5.8

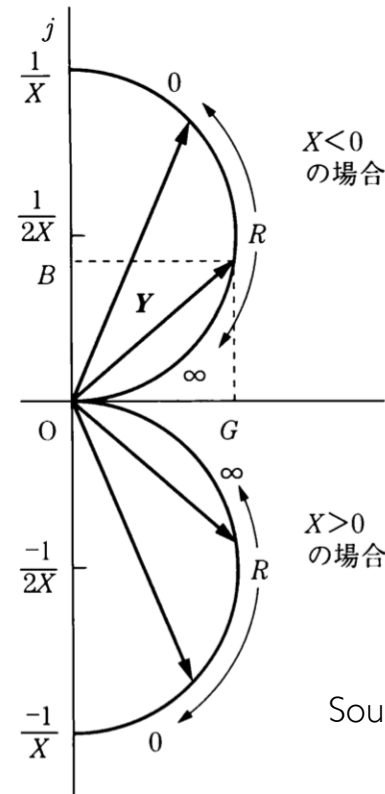


図 5.9

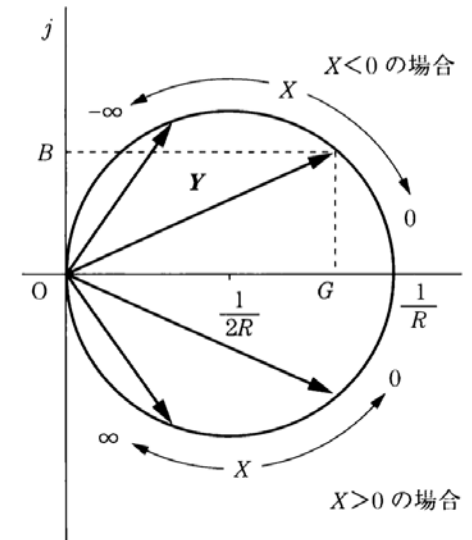


図 5.10

Source: ポイントで学ぶ電気回路, 三浦

なぜベクトル軌跡が必要か

配布用

ベクトル軌跡図

1つの可変素子をもった回路はアドミッタンス軌跡図を用いて解析すると便利である。 $I = V Y$ で V は通常定数であるので、 Y の軌跡は可変素子を変化させたときの I の変動をも表わしていることになる。

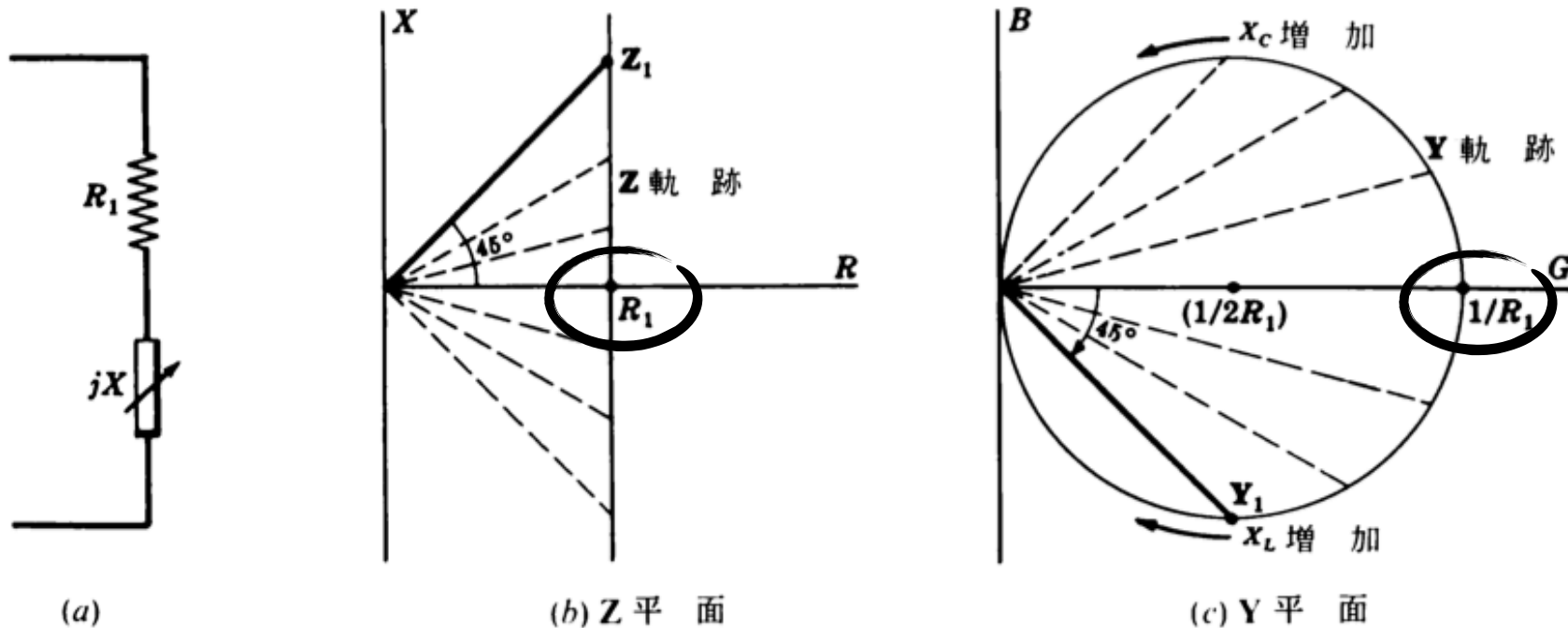


図 8 - 10

(b),(c)は R_1 一定で X を変化させた場合

○ 軌跡が実軸を跨ぐ = 共振が起きる

→ 回路での共振が起きる可能性の有無がわかる

電流軌跡

図 8 - 13(a)に示すような, 枝 1 は固定抵抗 R_1 とリアクタンス jX_L からなり, 枝 2 は固定抵抗 R_2 と可変容量 $-jX_C$ からなる並列回路を考えてみよう.

2 枝の合成アドミッタンス Y_T は

$$Y_T = Y_1 + Y_2$$

ベクトル和

図 8 - 13(b)において, 固定点 Y_1 に Y_2 の軌跡を加えることによって, Y_T の軌跡を得る.

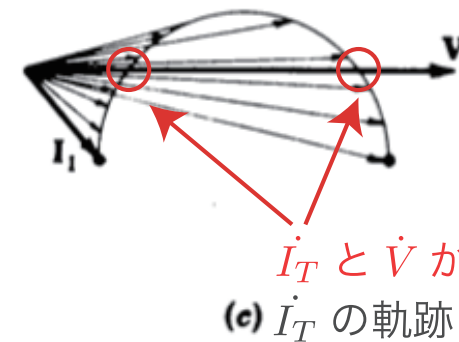
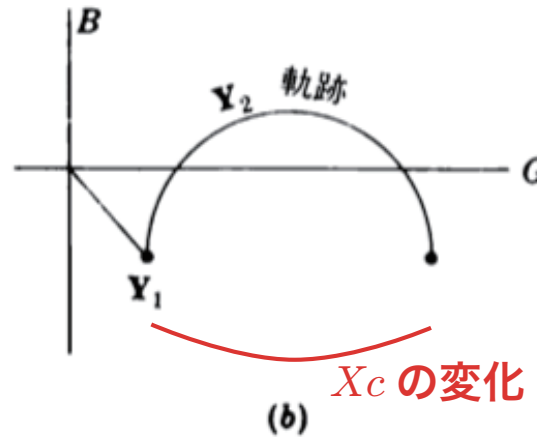
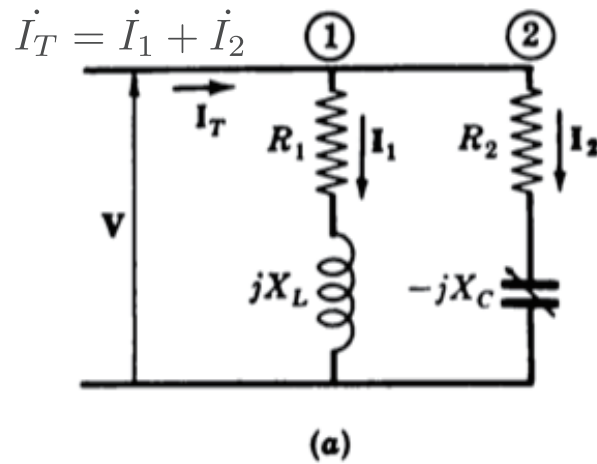


図 8 - 13

電流は $I = V Y$ によって与えられるので, V を基準にとれば, 全電流 I_T の軌跡は合成アドミッタンス Y_T の軌跡と同じ形となり, 図 8 - 13(c)に示すように, 固定 I_1 に変化する I_2 を加えればよい. また, 図 8 - 13(c)より, この回路は I_T と供給電圧 V が同相になる 2 つの C の値があることがわかる.

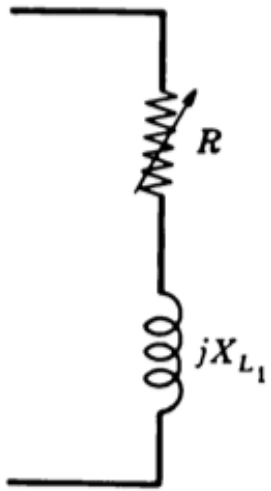
さらに図 8 - 13(c)を検討すると, この回路はある条件のもとでは, 共振する C の値をもたないことがわかる. すなわち, 例えば, 軌跡を示す半円の直径 $1/2R_2$ が小さくなり, この円が V 軸と交わらなくなれば, 共振する C の値はなくなる. これら軌跡の応用については, 次の問題でさらに検討している.

ベクトル軌跡からわかること

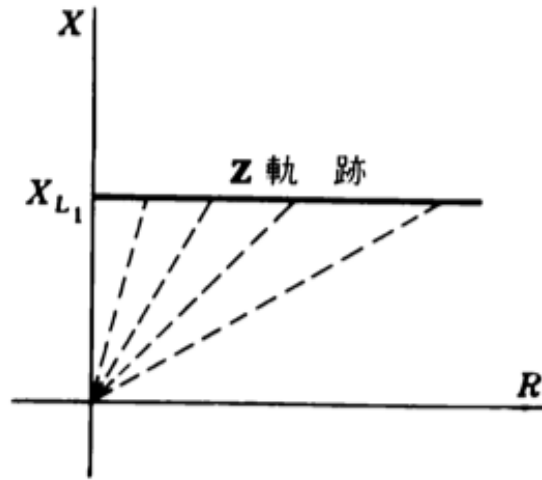
- 共振する可能性の有無
- $\mathbf{V}=\mathbf{Z}\mathbf{I}$ から $|\mathbf{I}|$ が一定のとき、インピーダンスの軌跡が電圧フェーザの軌跡の相当する
- $\mathbf{I}=\mathbf{Y}\mathbf{V}$ から $|\mathbf{V}|$ が一定のとき、アドミタンスの軌跡が電流フェーザの軌跡に相当する
- ※インピーダンス・アドミタンスは「ベクトル軌跡」で、電圧・電流は「フェーザ軌跡」
- (どちらもベクトル軌跡と記述している本も多い)

RL, RC 直列回路で R を変化させた場合 でのインピーダンスのベクトル軌跡

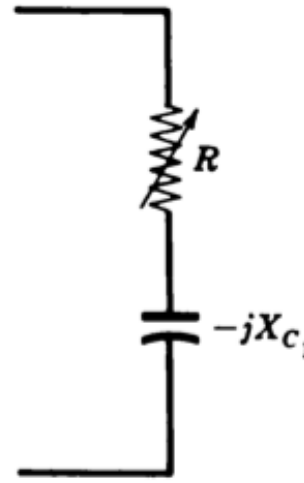
$R = 0$ の場合は虚軸上の X (誘導性) または $-X$ (容量性) となり、 R を増加すると実軸と平行かつ虚軸から遠ざかる軌跡を描く。



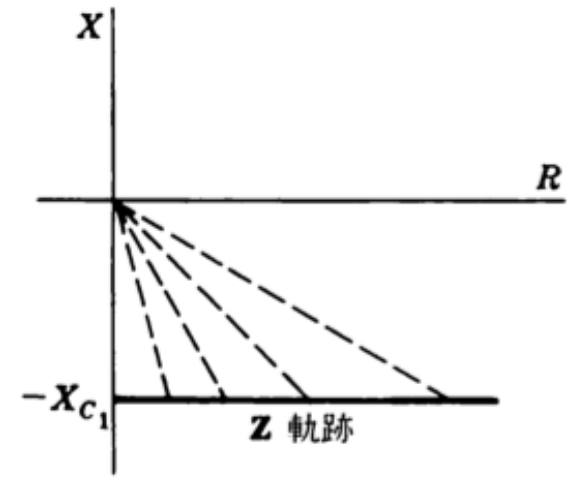
(a)



(b) Z 平面



(a)



(b) Z 平面

Source: マグロウヒル大学演習 電気回路, J.A. Edminister(p107-108)

RX(L,C)直列回路でXを変化させた場合 でのインピーダンスのベクトル軌跡

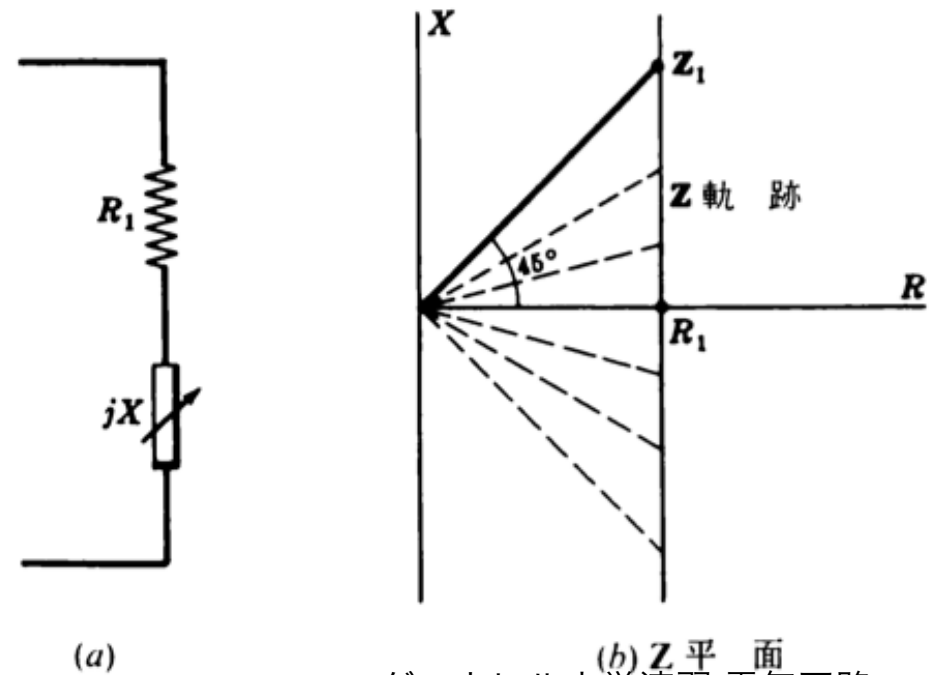
$X = 0$ の場合は実軸上の R となり (共振状態)、 X の増加で虚軸と平行かつ実軸から遠ざかる軌跡を描く。誘導性の場合は第一象限、容量性の場合は第四象限で遠ざかる。また、 X は角周波数 ω を含むので角周波数を変化させた場合に相当する。

RLC 直列回路で $|\dot{V}|$ 一定として角周波数を $0 \rightarrow \omega_0 \rightarrow \infty$ へ変化させると (ω_0 は共振周波数)、リアクタンス X は $-\infty \rightarrow 0 \rightarrow \infty$ に変化する。

$\omega < \omega_0$: $\frac{1}{\omega C} > \omega L$, $(\omega L - \frac{1}{\omega C})$ は負。 $\omega \rightarrow 0$ で $-\infty$ に収束する。

$\omega = \omega_0$: 共振状態

$\omega > \omega_0$: $(\omega L - \frac{1}{\omega C})$ が正。 $\omega \rightarrow \infty$ で $X \rightarrow \infty$ 。



Source: マグロウヒル大学演習 電気回路, J.A. Edminister(p106)

インピーダンス \dot{Z} (アドミタンス \dot{Y}) のベクトル軌跡に対し、逆数のベクトルであるアドミタンス $\frac{1}{\dot{Z}} = \dot{Y}$ (インピーダンス $\frac{1}{\dot{Y}} = \dot{Z}$) の軌跡を逆図形という。

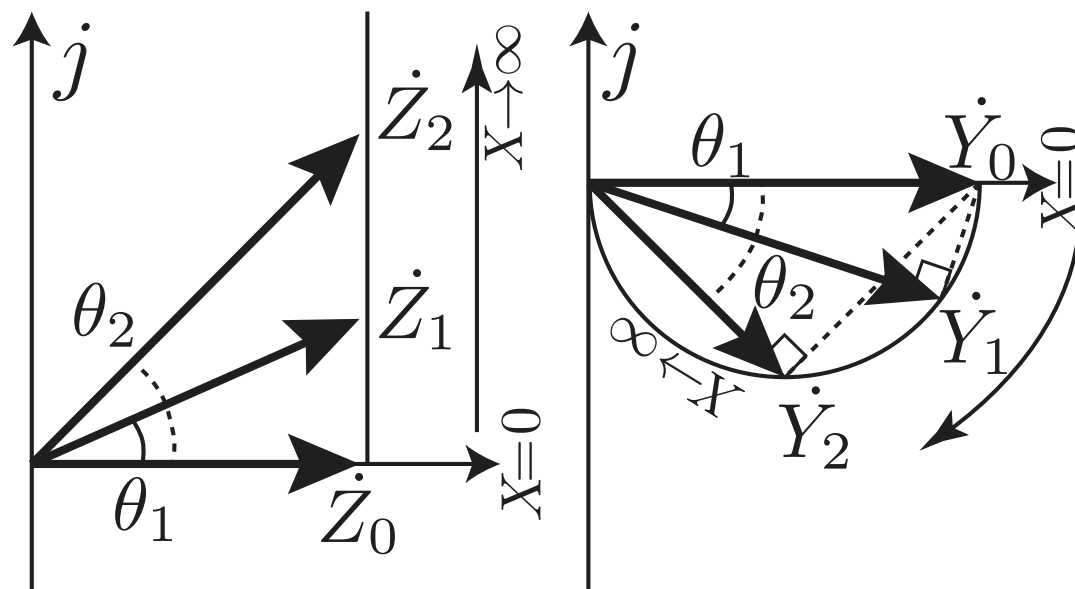
複素インピーダンス $\dot{Z} = R + jX$ について、 R を一定として X を 0 から増加させたとき θ_1 の偏角となったインピーダンスが $\dot{Z}_1 = |\dot{Z}_1| \angle \theta_1$ であるとき、

$$\frac{|\dot{Z}_0|}{|\dot{Z}_1|} = \cos \theta_1, \quad \frac{1}{|\dot{Z}_1|} = \frac{\cos \theta_1}{|\dot{Z}_0|}$$

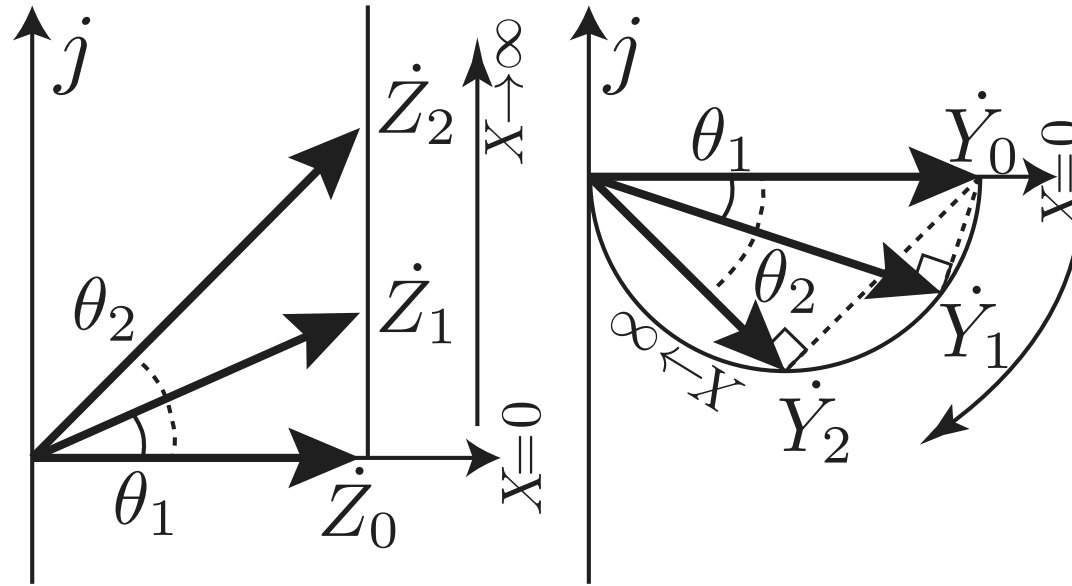
となる。 \dot{Z}_1 のアドミタンス \dot{Y}_1 は

$$\dot{Y}_1 = \frac{1}{\dot{Z}_1} = \frac{1}{|\dot{Z}_1| \angle \theta_1} = \frac{\cos \theta_1}{|\dot{Z}_0|} \angle -\theta_1 = |\dot{Y}_0| \cos \theta_1 \angle -\theta_1, \quad \frac{|\dot{Y}_1|}{|\dot{Y}_0|} = \cos \theta_1$$

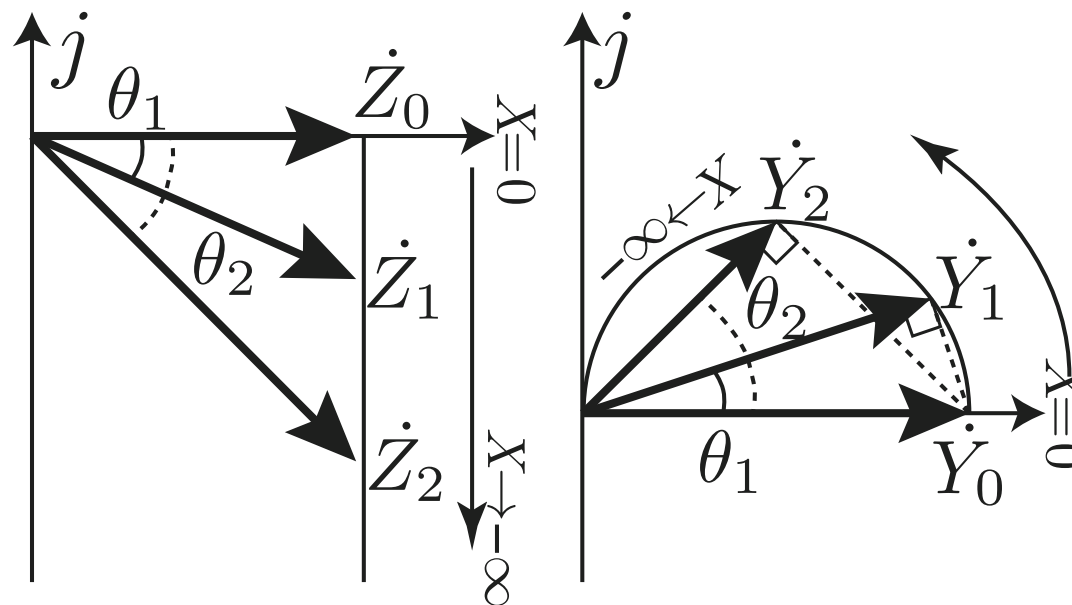
となる。同様に X を増加させた \dot{Z}_2 は $\dot{Y}_2 = |\dot{Y}_0| \cos \theta_2 \angle -\theta_2$ となる。これらの関係は $|\dot{Y}_0|$ が直径の円に内接する三角形に他ならない。よって円の中心はベクトルの原点から $\frac{|\dot{Y}_0|}{2} = \frac{1}{2R}$ 平行移動した点になる。



配布用



$X > 0$ の場合



$X < 0$ の場合

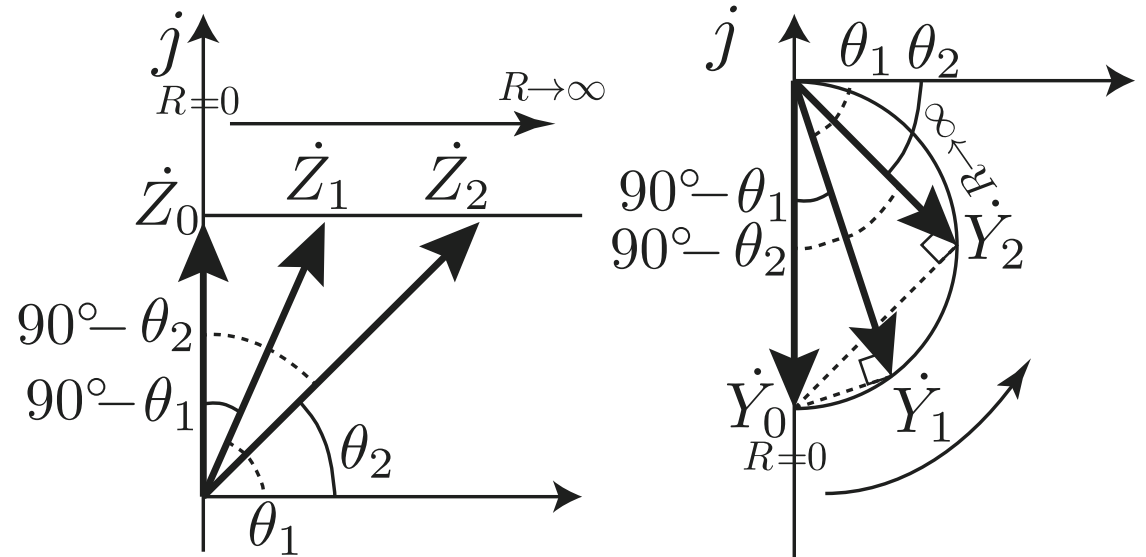
複素インピーダンス $\dot{Z} = R + jX$ について、 X を一定として R を 0 から増加させたときも同様に逆図形を求める。 θ_1 の偏角となったインピーダンスが $\dot{Z}_1 = |\dot{Z}_1| \angle \theta_1$ であるとする、

$$\frac{|\dot{Z}_0|}{|\dot{Z}_1|} = \cos(90^\circ - \theta_1)$$

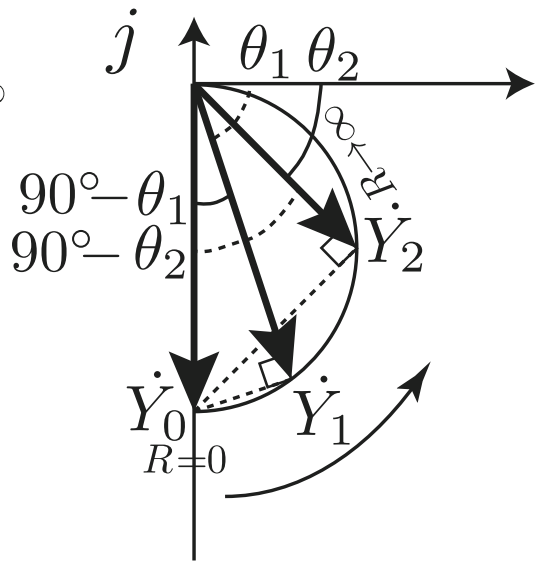
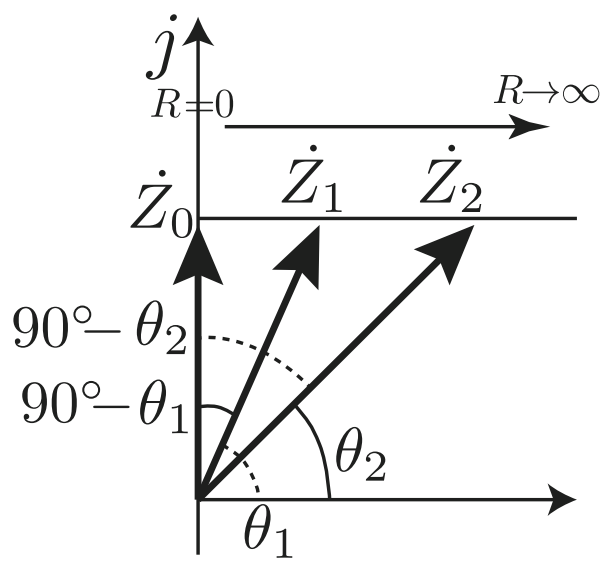
となる。 \dot{Z}_1 のアドミタンス \dot{Y}_1 は

$$\dot{Y}_1 = \frac{1}{\dot{Z}_1} = \frac{1}{|\dot{Z}_1| \angle \theta_1} = \frac{\cos(90^\circ - \theta_1)}{|\dot{Z}_0|} \angle -\theta_1 = |\dot{Y}_0| \cos(90^\circ - \theta_1) \angle -\theta_1$$

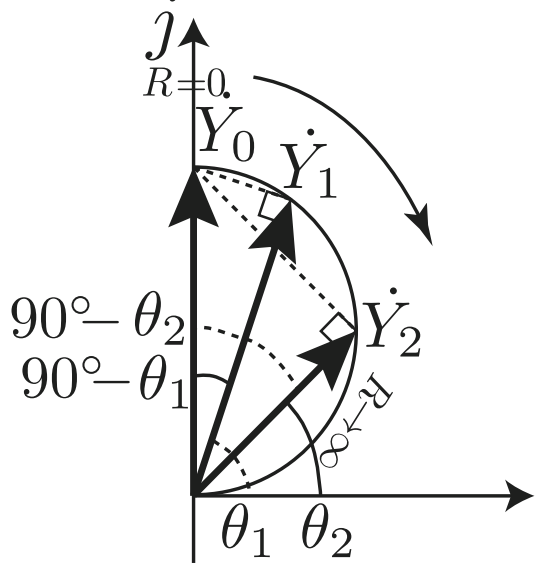
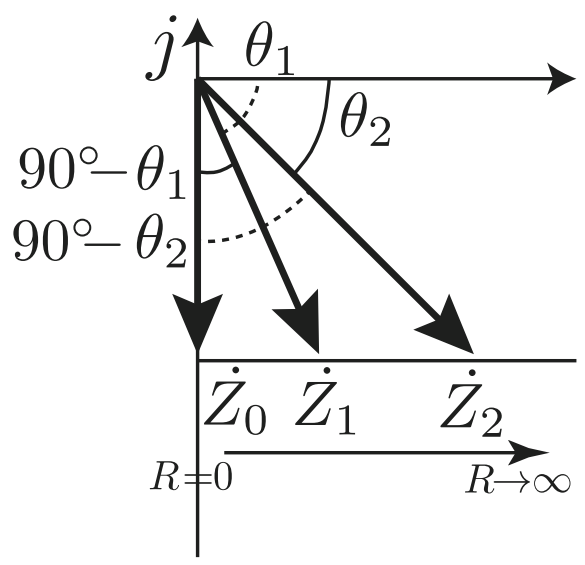
となる。同様に R を増加させた \dot{Z}_2 (偏角 θ_2) については $\dot{Y}_2 = |\dot{Y}_0| \cos(90^\circ - \theta_2) \angle -\theta_2$ となる。これらの関係は $|\dot{Y}_0|$ が直径の円に内接する三角形に他ならない。よって円の中心はベクトルの原点から $-j \frac{|\dot{Y}_0|}{2} = -j \frac{1}{2X}$ 平行移動した点になる。



配布用

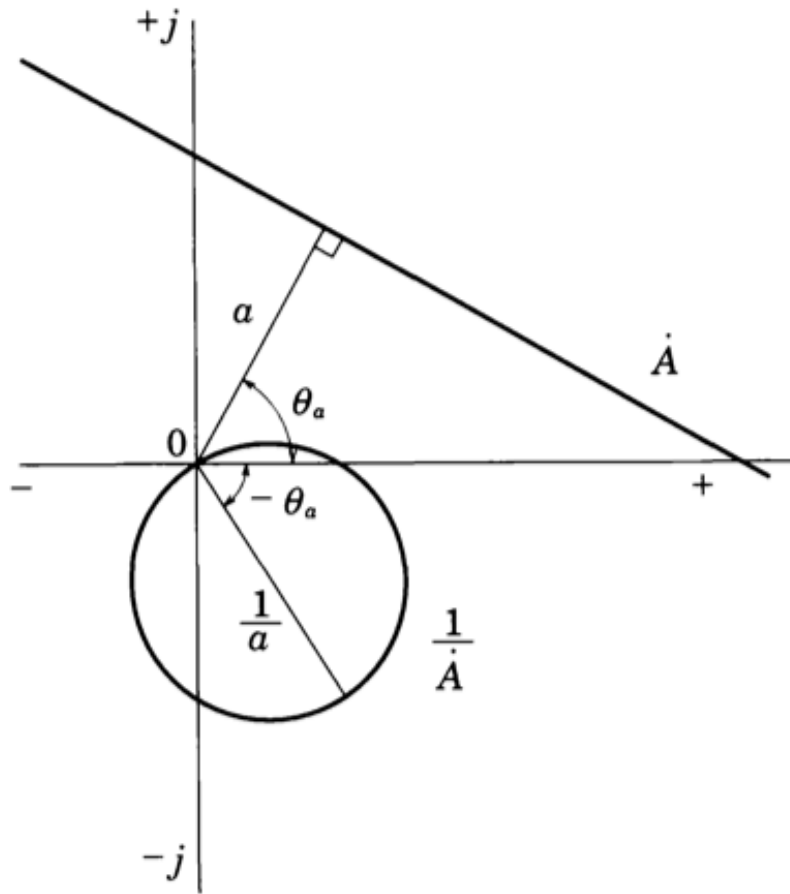


$X > 0$ の場合

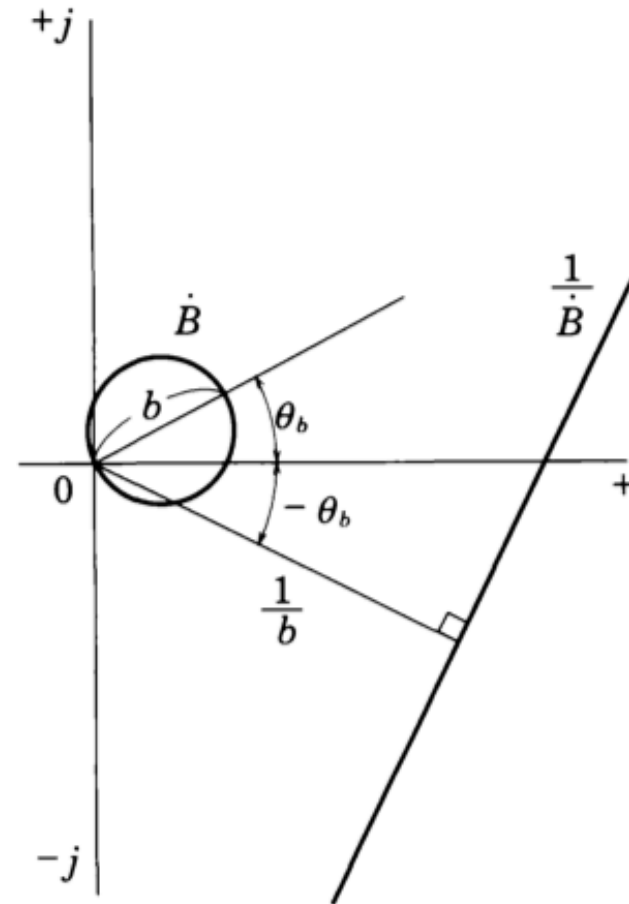


$X < 0$ の場合

逆図形における円と直線



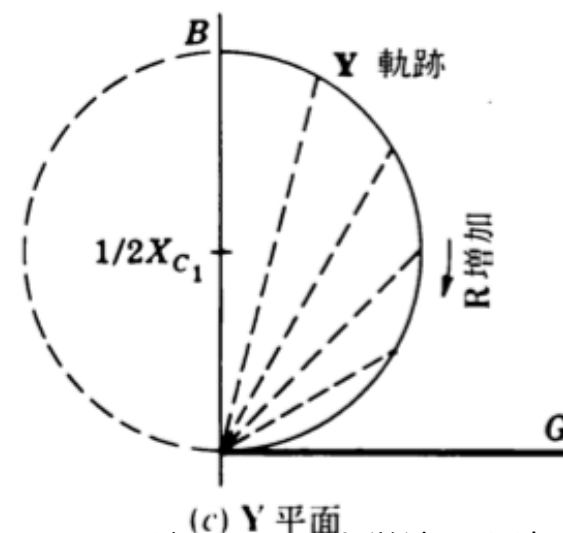
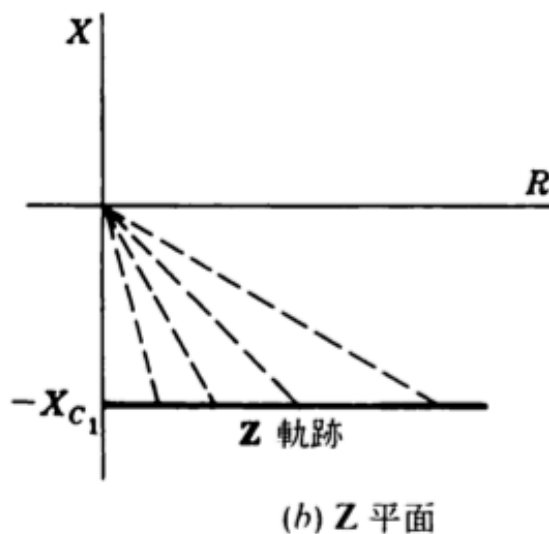
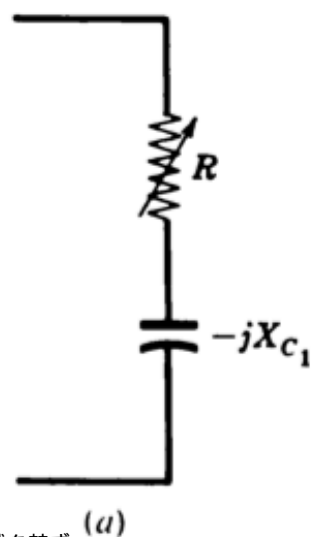
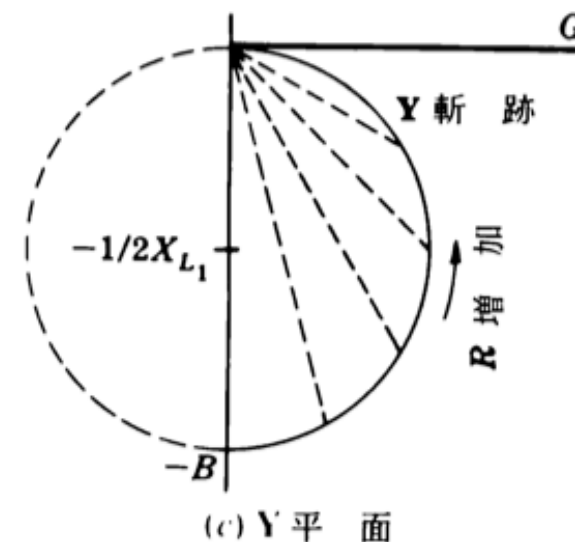
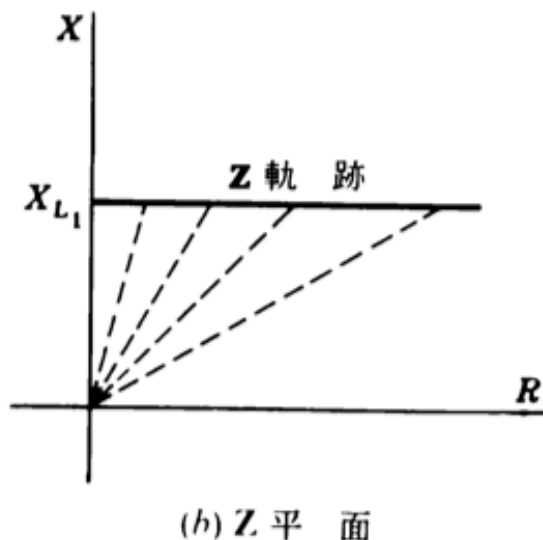
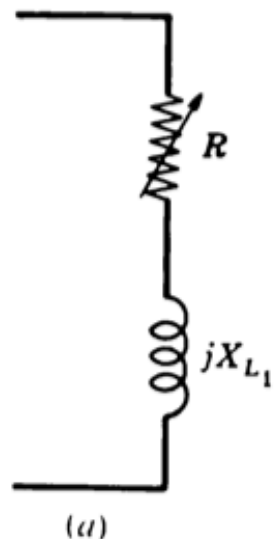
(a) 直線の逆図形は円となる



(b) 円の逆図形は直線となる

Source: 回路理論 問邊幸三郎著

RL, RC直列回路でRを変化させた場合でのベクトル軌跡と逆図形



$RX(L,C)$ 直列回路で X を変化させた場合 でのベクトル軌跡と逆図形

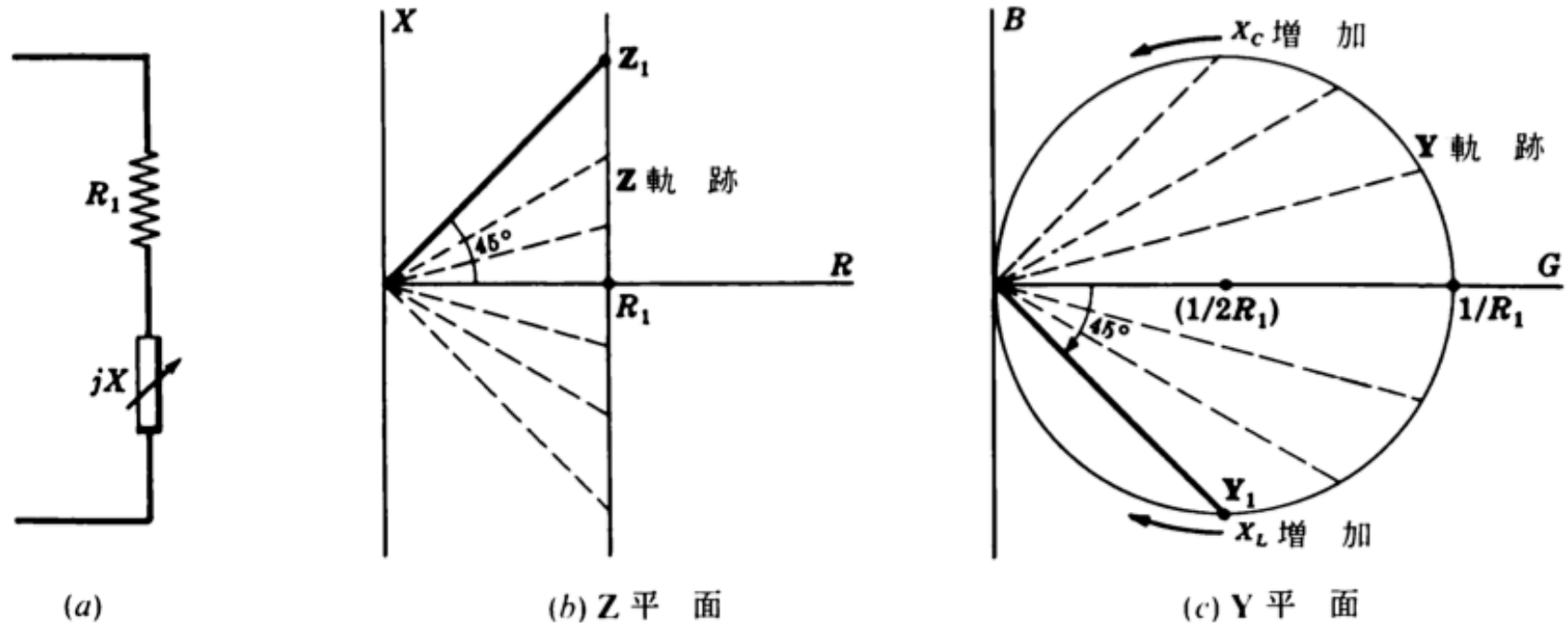


図 8 - 10

Source: マグロウヒル大学演習 電気回路, J. A. Edminister(p106)

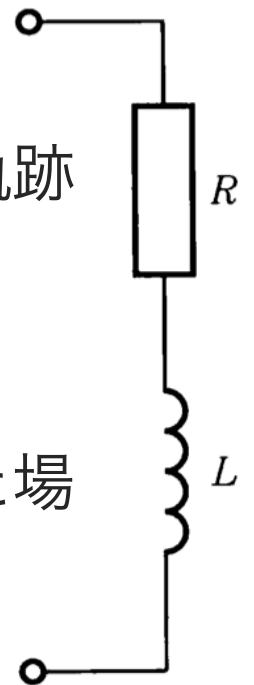
例題5.4 (p129)

例図 5.3 に示すような RL 直列回路について、次の問に答えよ。

(1) R のみを変化させたときの回路のインピーダンス \dot{Z} のベクトル軌跡を描け。ただし $X = \omega L = 1[\Omega]$ 一定とする。

(2) X のみを変化させた時の回路のアドミタンス \dot{Y} のベクトル軌跡を描け。ただし $R = 0.5[\Omega]$ 一定とする。

(3) (2) において電圧 $\dot{V} = 10[V]$ を印加し角周波数を変化させた場合の電流のフェーザ軌跡を示せ。



例図 5.3

Source: ポイントで学ぶ電気回路,
三浦光著

例題5.4 (p129)

例図 5.3 に示すような RL 直列回路について、次の問に答えよ。

(1) R のみを変化させたときの回路のインピーダンス \dot{Z} のベクトル

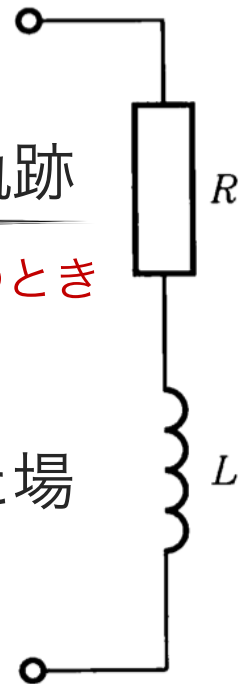
軌跡を描け。ただし $X = \omega L = 1[\Omega]$ 一定とする。

(2) X のみを変化させた時の回路のアドミタンス \dot{Y} のベクトル軌跡

を描け。ただし $R = 0.5[\Omega]$ 一定とする。
 $\dot{Y} = \frac{1}{R+jX}$ より最大値は $X = 0$ のとき

(3) (2) において電圧 $\dot{V} = 10[V]$ を印加し角周波数を変化させた場

合の電流のフェーザ軌跡を示せ。



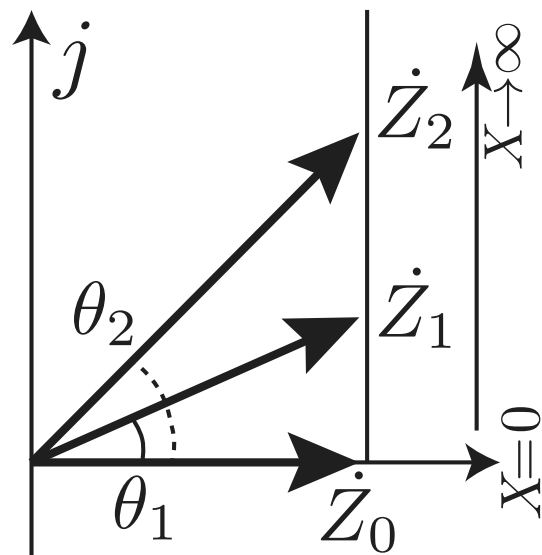
例図 5.3

Source: ポイントで学ぶ電気回路,
三浦光著

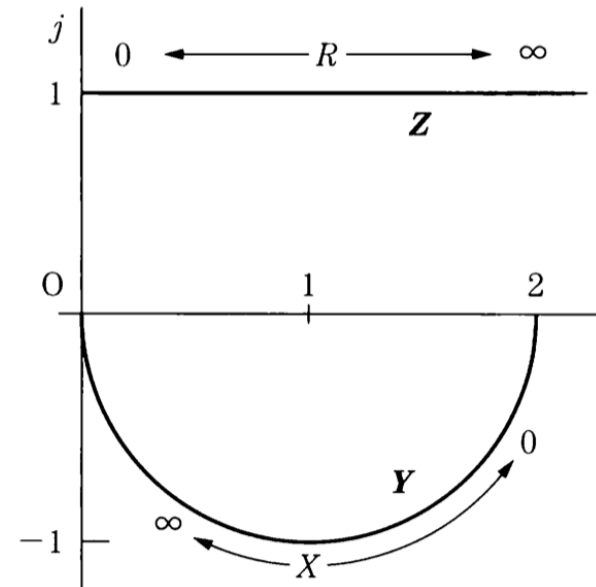
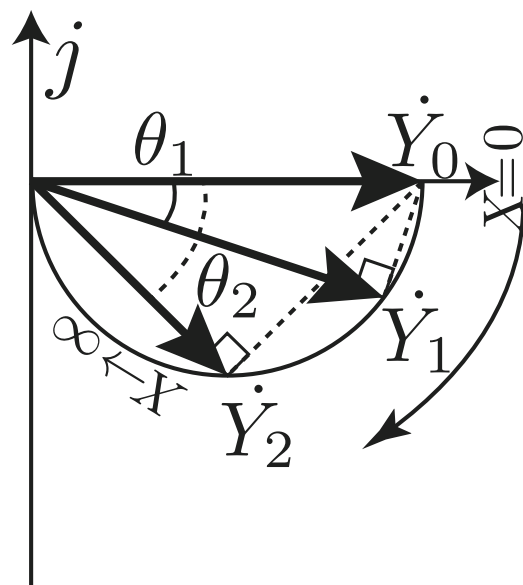
例題 5.4 解答例

(1) R のみを変化させたインピーダンス \dot{Z} のベクトル軌跡は $X = 1[\Omega]$ で実軸に平行な軌跡を描く。

(2) X のみを変化させた場合、インピーダンスのベクトル軌跡は (1) の解と直交する直線となる。その逆図形であるアドミタンス \dot{Y} のベクトル軌跡は \dot{Y} の最大値が $\frac{1}{R}$ であることから、ベクトルの原点から $(\frac{1}{2R}, 0)$ ずれた点を中心とする、半径 $\frac{1}{2R}$ の半円 (第四象限) を描く。従って中心 $(1, 0)$ 、半径 1 の半円となる。

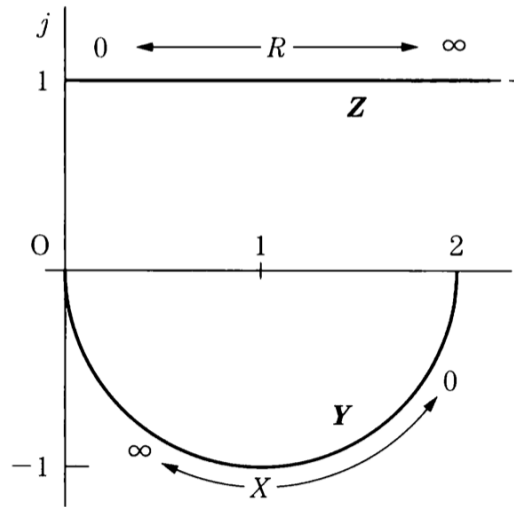


無断転載を禁ず

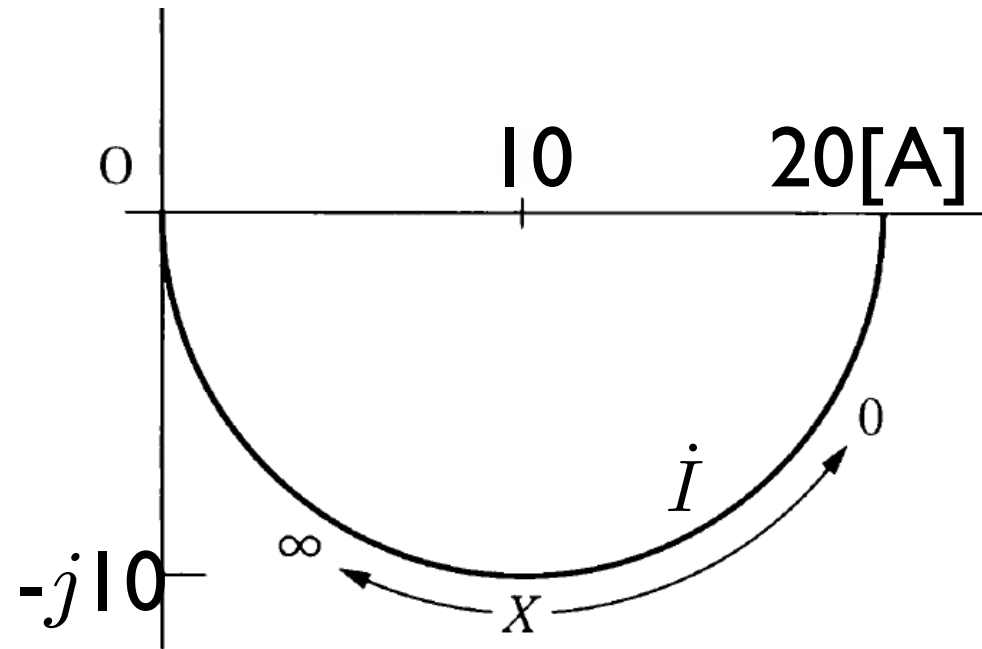


例図 5.4

(3) アドミタンスのベクトル軌跡と電流のフェーザ軌跡の関係
 $X = 0$ の状態でアドミタンス $Y = 2[S]$ であることから、 $I = YV$ より共振時の最大電流 $|I_0| = 20[A]$ となる。よってアドミタンスのベクトル軌跡と電流のフェーザ軌跡の関係は相似であることから、 $(10[A], 0)$ が中心で、半径 $10[A]$ の半円のフェーザ軌跡を描く。



例図 5.4



例図 5.4